

# **ASPEKTE TË PËRDORIMIT TË TENZORËVE DHE MATRICAVE NË MEKANIKËN E MATERIALEVE**

Niko Pojani

Misin Misini

Ligjëratë e hapur - 27 Prill 2023 -  
në Fakultetin e Inxhinierisë së Ndërtimit, Prishtinë  
Universiteti i Prishtinës

## PARATHËNIE

Në këtë Ligjëratë, paraqitjet përqendrohen te operimet me **matricat** dhe **tenzorët** në **Mekanikën e Materialeve – MM**. Ato i referohen materialit homogjen elastik linear dhe përgjithësisht **anizotrop**, në veçanti -materialit **ortotrop**.

**Matricat** - nocione të mirënjohura në Inxhinieri.

Në fusha të ndryshme inxhinierike është i gjerë gjithashtu interesi për **tenzorët**, si në: **Inxhinieri ndërtimi, Gjeologji, Gjeofizikë, Inxhinieri mekanike, Inxhinieri elektrike**, etj.

Tenzorët kanë njohur aplikime të gjera edhe në drejtime të ndryshme fiziko-matematike, si: **Teoria e Relativitetit, Fizika kuantike, Mekanika e fluideve, Elektromagnetizmi**, etj.

## BIBLIOGRAFIA- REFERENCAT

- [1] Flugge W. (1972) - *“Tensor Analysis and Continuum Mechanics”*, Springer Werlag, Berlin Heidelberg
- [2] Misra S. (2019) - *“Structural Geology – Lecture 08: Stress ”*, IITK NPTEL
- [3] Wikipedia - *“Stress Tensor”*
- [4] Wittel F. (2018) – *“Mechanics of Building Materials – Elasticity Theory”*, ETH Zurich
- [5] Jaeger L.G. (1966) – *“Cartesian Tensors in Engineering Science”*, Pergamon Press, Oxford – London
- [6] Casamatis M., Matarese L., Sharpe D., Zunica K. - *“Stress, Strain and Their Relationship”*
- [7] Barkey M. (2019) - *“Theory of Elasticity-Coordinate Transformations”*, Aerospace Eng., Univ. Alabama
- [8] McGinty B. (2012) - *“Introductory Continuum Mechanics – Strain”*
- [9] Saravanan M. K. *“Anisotropic elastic behavior - Macromechanical analysis of a lamina”*
- [10] Univ. Salento - *“Stress strain relationship for anisotropic materials”*
- [11] Nemeth Langley P.M. (2011) – *“Const. Eqs. for Elastic Anisotropic Materials”*, NASA/TM - Virginia
- [12] MIT - *“Module 3 - Constitutive Equations”*
- [13] Slawinski M. (2007) - *“Waves and Rays in Elastic Continua”*, Memorial University, Canada

## BIBLIOGRAFIA-REFERENCAT

- [14] Barkey M. (2020) – *“Theory of Elasticity - Generalized Hooke’s Law”*, Aerospace Eng., Univ. Alabama
- [15] Bibing - *“Chapter 2 Laminate Theory”*
- [16] Wikipedia - *“Transverse Isotropy”*
- [17] (Earth Science Beta) – *“What is a transverse isotropic rock?”*
- [18] Atrian A. - *“Macromechanical Analysis of a Lamina”*, I.A. University, Najafabad Branch
- [19] Roylance D. (2000-2001) – *“Transformation of Stresses and Strains – Const. Eqs.”*, MIT, Cambridge
- [20] Engineering Fundamentals (Funda) - *“Hooke's Law for Orthotropic Materials Orthotropic Definition”*
- [21] Mohite P.M. (2014) – *“Composite Materials and Structures, Const. Relations”*, NPTEL
- [22] Ruzaimi M. *“Mechanics of Composite Materials”*, - University Malaysia Pahang
- [23] Bing - *“Properties of Lamina”*
- [24] NPTEL - *“Lecture 12: Constitutive Relations for Orthotropic Materials and Stress-Strain Transformations”*
- [25] Lemprière B. M. (1968) - *“Poisson’s Ratio in Orthotropic Materials”*, Institute of Aeronautics, California

# SHKURT PËR TENZORËT

Tenzorët janë objekte (entitete) matematikë, vetia themelore e të cilëve është mos-ndryshimi (invarianca) ndaj ndryshimit të sistemit kordinativ të referimit. D.m.th, sistemi i referimit mund të ndryshojë, p.sh. ai Kartezian nga  $x$ - $y$ - $z$  në  $x'$ - $y'$ - $z'$ , dhe komponentet e tenzorit mund të ndryshojnë, por ***vetë tenzori nuk ndryshon, është invariant*** ndaj atij ndryshimi.

***“Invarianca”*** e tenzorëve bën që formulimet në trajtë tenzoriale të ligjeve të ndryshme të Fizikës të jenë “invariante” dhe ashtu ato paraqesin realitetin fizik objektivist, të pavarur nga vrojtuesi (sistemi i referimit).

# SHKURT PËR TENZORËT

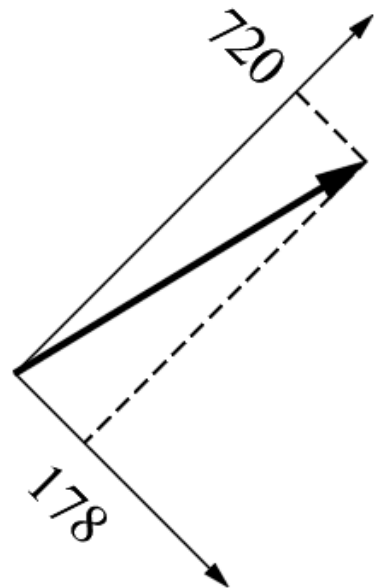
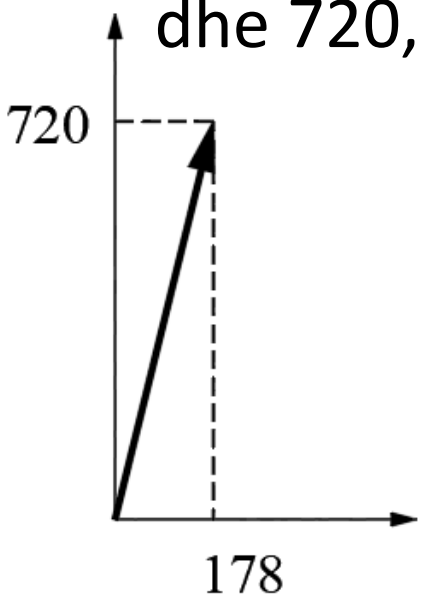
Tenzorët më të thjeshtë janë ata *të rendit zero* - kështu konsiderohen përgjithësisht skalarët. Të gjithë tenzorët e rendit “zero” janë skalarë; por jo të gjithë skalarët janë tenzorë”.

Temperatura është madhësi skalare dhe njëherësh tenzor i rendit “zero”: vlera e saj është e pavarur nga sistemi i referimit.

Ndërkaq, frekuenca e dritës që vjen nga një burim monokromatik, ndonëse edhe kjo është madhësi skalare, nuk është tenzor. Arsyeja: vlera e matur e frekuencës varet nga shpejtësia që ka sistemi i referimit (i matjes) kundrejt burimit të rrezatimit: ligji “Dopler” në Fizikë.

# SHKURT PËR TENZORËT

Vektori konsiderohet *tenzor i rendit të parë*. Por, edhe për vektorët mund të themi se “*të gjithë tenzorët e rendit të parë janë vektorë, por jo të gjithë vektorët janë tenzorë*”. Vektorët e forcës, shpejtësisë, akseleracionit etj. janë tenzorë të rendit të parë. Ndërkaq **nuk është tenzor** një madhësi e paraqitur me një matricë-shtyllë apo “vektor” si p.sh.  $\begin{bmatrix} 178 \\ 720 \end{bmatrix}$ , ku **numrat** 178 dhe 720, në cm dhe N shprehin gjatësinë dhe peshën e një njeriu.



Kjo sepse, pavarësisht që kjo madhësi mund të thirret “vektor”, ajo nuk është invariante ndaj ndryshimit të sistemit koordinativ (shih dy figurat: vektorët kanë orientime të ndryshme!) Tenzorët e *rendit të dytë* mund të paraqiten me anën e matricave katrore. Por, përsëri, *jo çdo matricë katrore është tenzor i rendit të dytë*.

## VËSHTRIM I SHKURTËR HISTORIK MBI TENZORËT

“Tensor” vjen nga latinishtja “*tensus*”: “*sforcim*”, “*tension* (tërheqje)” – term dhe nocion kryesor ky i Rezistencës së Materialeve (RM) Mekanikës së Materialeve (MM) dhe Teorisë së Elasticitetit (TE).

Fillimisht termi është përdorur më 1846 nga Uilliam Hamilton (Sir William Rowan Hamilton, 1805 – 1865), por për të emërtuar diçka të ndryshme nga kuptimi i sotëm i tij në MM. Në këtë kuptim ai definohet më 1898 nga Fogti (Woldemar Voigt, 1850 –1919). Por, në një kuptim të gjerë, nocioni i tenzorit lidhet me lindjen dhe zhvillimet e Gjeometrisë diferenciale, themeluar nga Karl Gaus (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) dhe Bernard Rimani (George Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866). Në këtë kontekst vlerësohen edhe kontributet e dhëna nga Kristofel (Elwin Bruno Christoffel, 1829–1900).



## VËSHTRIM I SHKURTËR HISTORIK MBI TENZORËT

Fundi i shek. XIX – fillimi i shekullit XX: strukturimi i teorisë së tenzorëve, ku kanë kontribuar veçanërisht Gibbs (Josiah Willard Gibbs, 1839-1903), Riçi-Curbastro (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925) dhe Levi-Çivita (Tullio Levi-Civita, 1873-1941).

Fillimi i shek XX: aplikimet e tenzorëve në ***Teorinë e Përgjithshme të Relativitetit - TPR*** (1915) nga Albert Ajnshtajni (Albert Einstein, 1879-1955), që gjeti te tenzorët mjete matematike krejt adekuate, gati të pazëvendësueshme, për formulimin ekuacioneve të teorisë së tij. Aty, vend “fondamental” kanë “tenzori metrik” dhe “tenzorët e kurbësisë”, të Rimanit dhe të Riçit, të përdorur për të shprehur gravitetin nëpërmjet Gjeometrisë.

Tenzorët janë aplikuar edhe për shprehjet e dukurisë së “*mbivendosjes*” apo të “*super-pozimit kuantik*” (“Quantum Superposition”) në ***Mekanikën kuantike***.

## VËSHTRIM I SHKURTËR HISTORIK MBI TENZORËT

Tepër efektive janë përdorimet e tenzorëve edhe në ***Mekanikën e mjedisit të vazhduar (MMV)*** dhe disiplinat që përfshin ajo, veçanërisht në ***TE*** dhe ***MM***. Në librin “Tensor Analysis and Continuum Mechanics”, Springer-Verlag, Berlin, 1972 (shih Lit. [1]) profesori gjermano-amerikan Fluge i Universitetit të Stanfordit–SHBA (Wilhelm Flugge, 1904-1990) shprehej se:

***“Në MMV tenzorët ndjehen si peshku në ujë”***

Sipas Fluge, që në gjysmën e parë të shek XX teoria e tenzorëve u bë mjaft tërheqëse edhe për studiuesit e MMV; por, në atë periudhë zhvillime pati kryesisht në qendrat shkencore Europiane. Më vonë, edhe në SHBA, Japoni, etj.

## KUJTESA NGA *MM* DHE *TE*

- **Nocioni i Mjedisit të vazhduar - MV (“Continuum”)**

MV- mjedis material (“trup”) pa boshllëqe. MV, matematikisht përshkruhet në terma të funksioneve të vazhduar. Rast i veçantë: Mjedisi i vazhduar elastik (MVE), nocion bazë në *TE* dhe *MM*. Gjatë ngarkimit të një MVE puna e forcave transformohet në energji potenciale të deformimit, thjesht në “energji të deformimit”. Kur hiqet ngarkesa, energjia “e magazinuar” bën që MVE të kthehet te gjendja fillestare.

Krahas nocionit të MVE definoohen edhe nocionet e sforcimit ( $\sigma$ ) dhe deformacionit ( $\epsilon$ ). Në *TE* dhe *MM* përdoret gjerësisht koncepti i MVE linear, që karakterizohet nga marrëdhënia lineare forca-zhvendosje ( $\sigma$ - $\epsilon$ ). Në MVE lineare aplikohet parimi i superpozimit të veprimeve apo efekteve.

# KUJTESA NGA MM DHE TE

- **Forcat, sforcimet dhe deformacionet**

Forcat e jashtme (FJ), dy grupe: “vëllimore”; “konturore” (“të kontaktit”). Nga veprimi i FJ, përgjithësisht çdo pikë e një MV ndikohet prej tyre, duke shkaktuar deformacione dhe sforcime të brendshme si “reaksion” (“kundërvënie”) ndaj atij veprimi.

*Sforcimi*: forcë për njësi të sipërfaqes; dallohet në sforcim *normal*  $\sigma$  dhe sforcim *tangencial* apo “të prerjes”  $\tau$ .

Në sistemin SI, njësia e sforcimit është Paskali,  $Pa$ :  $1Pa = 1 N/m^2$ . Në fushat e Ndërtimit, Gjeoteknikës, etj. përdoren shumëfisha të Paskalit:  $1kPa = 10^3 Pa$ ;  $1daN/cm^2 = 10^5 Pa \approx 1kgf/cm^2 = 1kG/cm^2 = 1 at$  (atmosferë) në sistemin e vjetër teknik të njësive.

# KUJTESA NGA RM DHE TE

- **Forcat, sforcimet dhe deformacionet**

Në fushën e Gjeologjisë strukturore dhe Tektonikës ka sforcime (presione) të mëdha dhe prandaj në to' përdoren shumëfisha të tillës si Mega-Paskali ( $1MPa = 10^6 Pa$ ) e Giga-Paskali ( $1GPa = 10^9 Pa$ ). Në kufirin e litosferës me mantelin e Tokës p.sh. sipas [2] presioni është i rendit  $25GPa$ , në kufirin bërthamë-mantel rreth  $330GPa$  dhe në qendër të Tokës  $400GPa$ .

Deformacioni, si ai gjatësor, linear  $\epsilon$  (zgjatje/shkurtim për njësi gjatësie), ashtu dhe ai këndor apo "i prerjes",  $\gamma$ , është pa njësi (ose m/m).

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Sforcimi (i shënuar zakonisht me  $\sigma$ ) dhe tenzori i sforcimit janë nocione qendrore në MMV.

Pavarësisht se jo me këto emërtime, ato janë futur për herë të parë nga Koshi' (Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857). Këto nocione i referohen për thjeshtësi kubit elementar të fig. 1.1, i nxjerrë ky nga një "trup" elastik që mund të jetë: strukturë ndërtimore (tra, kollonë, pllakë, mur mbajtës, digë etj), detal apo konstruksion mekanik, formacion gjeologjik, etj.

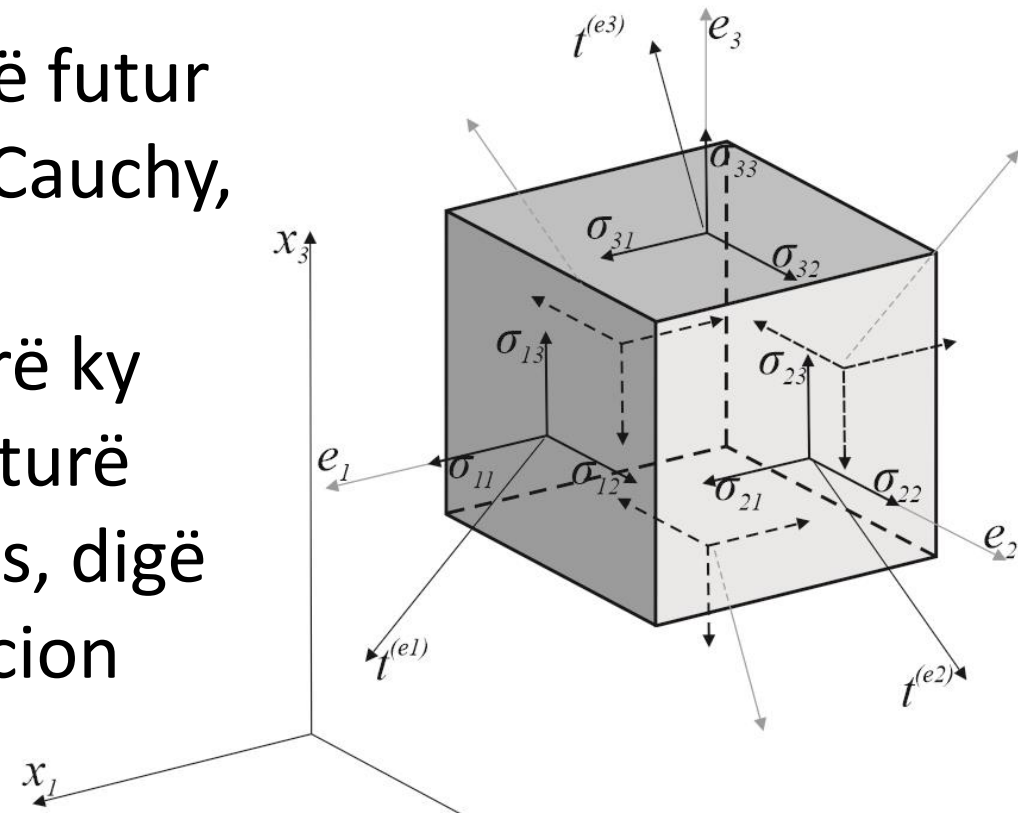


Figura 1.1

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Sikurse kuptohet nga fig. 1.1, në tërësinë e tyre sforcimet shprehin veprimin mbi kubin elementar i cili ushtrohet nga materiali jashtë tij, nëpërmjet “*sipërfaqes së kontaktit*”, e formuar kjo nga 6 faqet e kubit. Në tre faqet e dukshme të fig. 1.1 dallohen 9 sforcime  $\sigma_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ): disa “normale” e disa “*prerëse*” (“*tangenciale*”); këto të fundit shënohen edhe  $\tau_{ij}$ . Në faqet e tjera të kubit ka sforcime që janë praktikisht të njëjta në madhësi me ato të faqeve të dukshme.

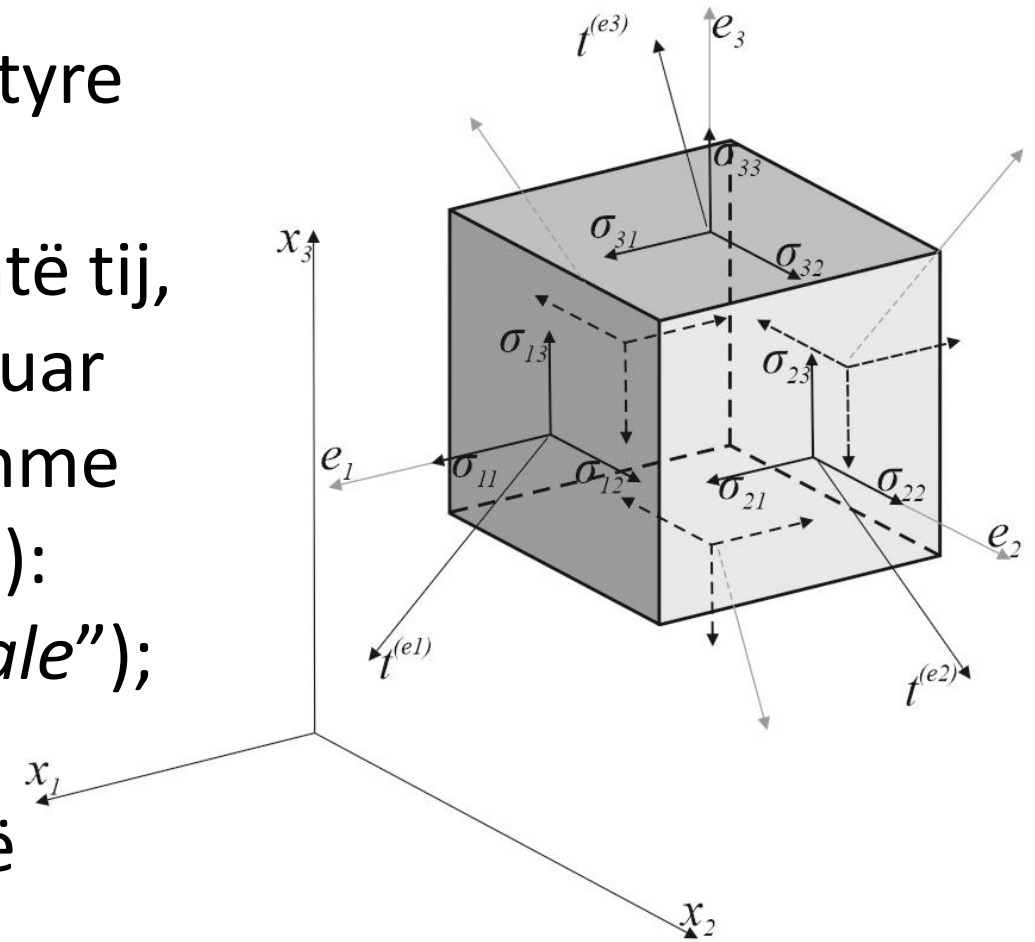


Figura 1.1

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Komponentët  $\sigma_{ij}$  të sforcimeve kanë dy indekse: i pari, referuar akseve koordinativë Kartezianë tregon orientimin e normales të faqes ku ushtrohet sforcimi (pra, orientimin sipas ortit koordinativ përkatës  $\mathbf{e}_i$ ), kurse i dyti - orientimin e sforcimit. Sistemi i akseve koordinativë zgjidhet zakonisht “i djathtë” dhe shënohet me  $x_1, x_2, x_3$  (me ortet njësi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , si “bazë koordinative”), ose thjesht me numurat 1, 2, 3, duke zëvendësuar (jo gjithnjë) simbolet “e zakonshme”  $x, y, z$ . Lidhur me simbolikën: sforcimet *normale* shënohen me dy indekse; por, nëse nuk krijohet ndonjë konfuzion, edhe me një indeks (p.sh.  $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x$ ).

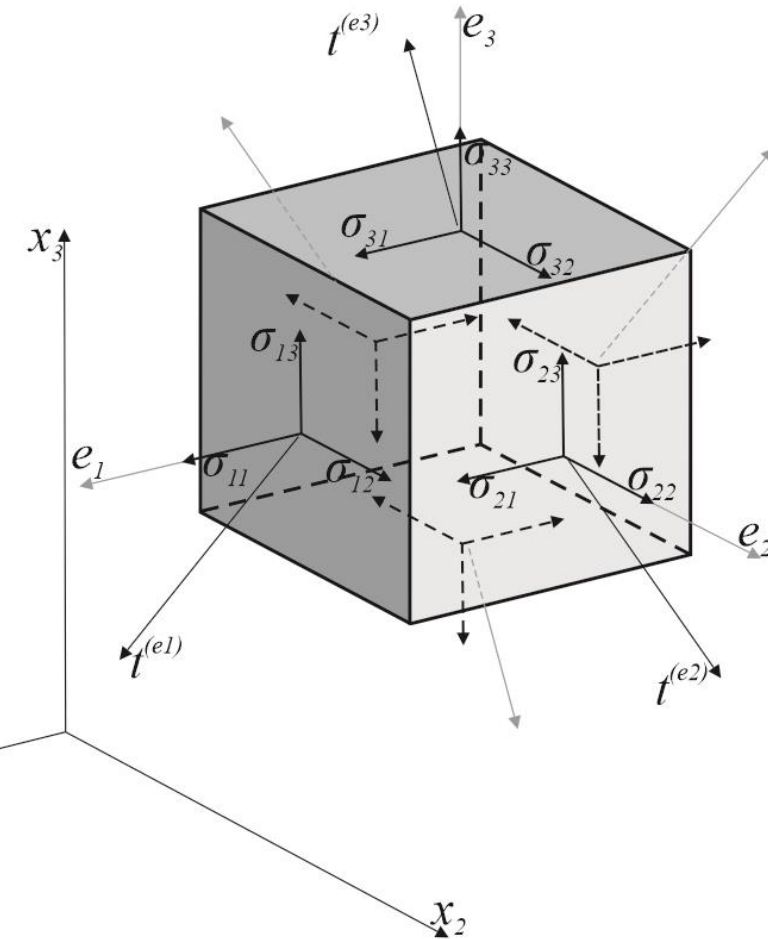


Figura 1.1



# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Një definim paraprak: tërësia e sforcimeve  $\sigma_{ij}$  në kubin elementar shpreh "*tenzorin e sforcimit*", shënuar me  $\sigma$  ose  $\sigma_{ij}$ , në pikën e konsideruar.

Sforcimet  $\sigma_{ij}$  janë "*komponentet e tenzorit të sforcimit*". Secila prej tyre varet nga orientimi hapsinor i sipërfaqes ku ushtrohet.

Nga kushtet e ekuilibrit del se nga 9 komponentet e tenzorit të sforcimit  $\sigma$  vetëm 6 janë të pavarura (sepse  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  – "Aksioma Boltzmann"). Në rastin më të përgjithshëm (hapsinor 3-D), duke përdorur simbolika të ndryshme për shënimin e akseve koordinativë apo edhe të sforcimeve, tenzori  $\sigma$  mund të shprehet me një nga format ekuivalente matricore vijuese.

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

$$[\sigma] \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$[\sigma] \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$[\sigma] \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Matricat katrore të mësipërme janë matrica simetrike:  $[\sigma] = [\sigma]^T$

Si gjithë tenzorët, tenzori  $\sigma$  është **invariant** kundrejt ndryshimit të sistemit koordinativ të referimit, ndërkohë që komponentet e tij  $\sigma_{ij}$  ndryshojnë.

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Veç sforcimeve  $\sigma_{ij}$ , në fig 1.1 tregohen vektorët  $\mathbf{t}^{(e_1)}$ ,  $\mathbf{t}^{(e_2)}$ ,  $\mathbf{t}^{(e_3)}$ . Secili prej tyre është një *vektor sforcimi*. Ky duhet nënkuptuar si rezultante e sforcimeve  $\sigma_{ij}$  në faqet me normale ortin korrespondues:  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ . Kuptohet se një vektor sforcimi  $\mathbf{t}^{(e_i)}$  lidhet si me pikën në shqyrtim ashtu dhe me orientimin e sipërfaqes që kalon nëpër atë pikë.

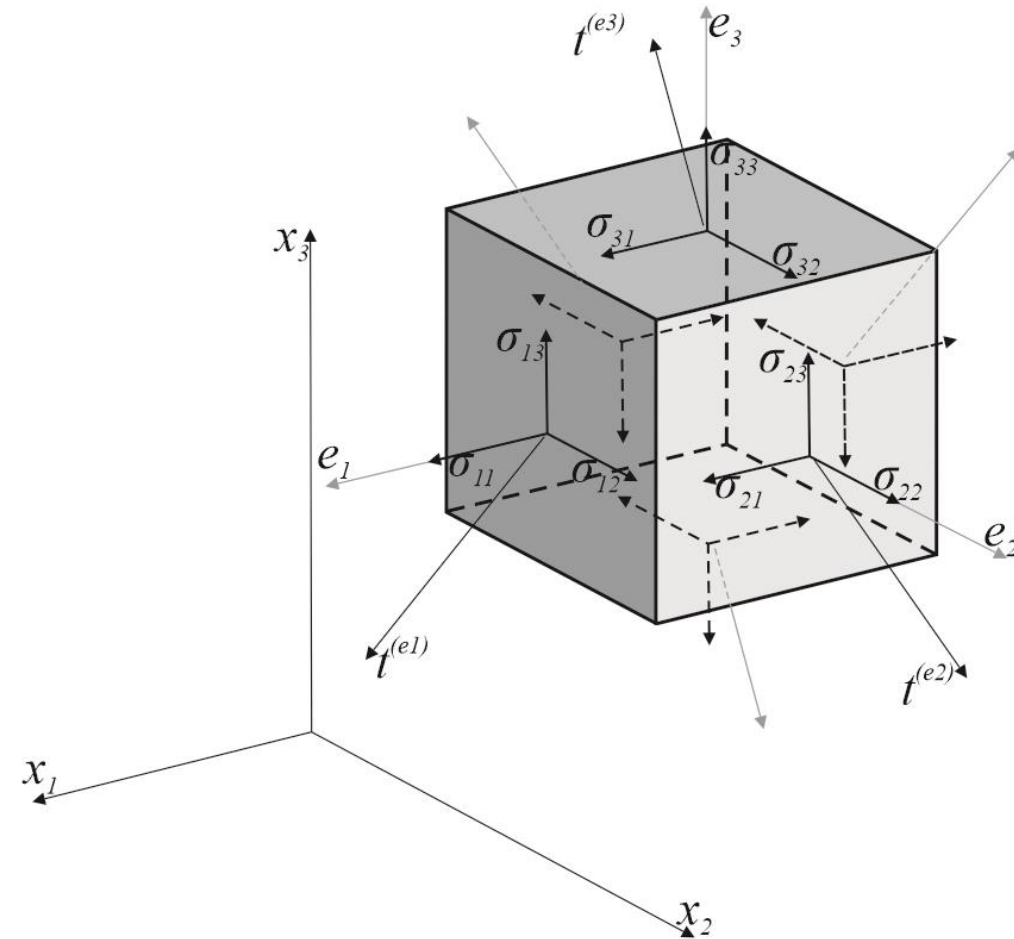


Figura 1.1

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Konkretisht, konsiderojmë një trup çfarëdo si në fig. 1.2 dhe një prerje S-S me orientim çfarëdo. Duke iu referuar një sipërfaqeje elementare  $\Delta A$  përreth një pike Q të trupit dhe forcës rezultante  $\Delta \vec{F}$  mbi këtë sipërfaqe, vektori i sforcimit  $\mathbf{t}$  në Q definohet nga:

$$\mathbf{t} \equiv \vec{\mathbf{t}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad (1.4)$$

Orientimi i  $\mathbf{t} \equiv \vec{\mathbf{t}}$  është i njëjtë me  $\Delta \vec{F}$ . Sforcimi normal  $\sigma$  mbi  $\Delta A =$  projeksion i  $\mathbf{t}$  në normalen  $\mathbf{n}$ ; sforcimi prerës në plan  $\tau =$  projeksioni i  $\mathbf{t}$  mbi sipërfaqen  $\Delta A$ . Në se identifikojmë planin S-S

me secilin nga planet koordinative, normalen  $\mathbf{n}$  me ortet  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  dhe projektojmë sforcimin prerës  $\tau$  në dy akset e planit koordinativ përkatës merret kubi i fig. 1.1.

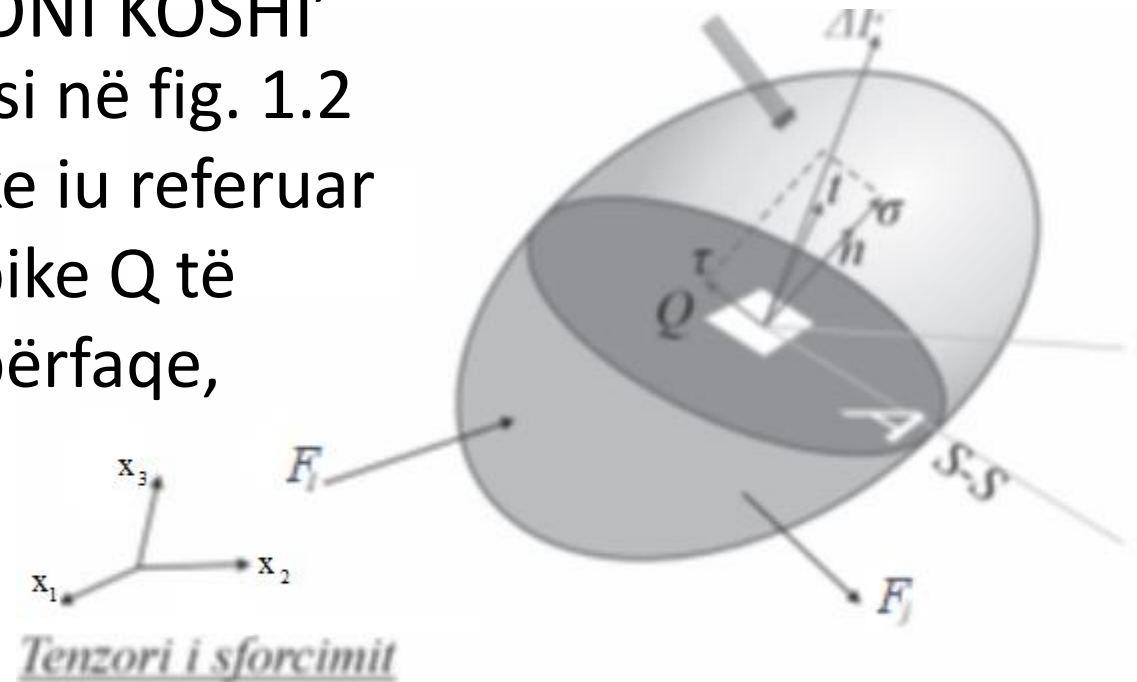


Figura 1.2 (përsht. nga [4])

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Riparaqesim si në fig. 1.3 kubin elementar të fig. 1.1. Konsiderojmë dhe tetraedrin elementar të fig. 1.4 që përftohet nga prerja e kubit elementar me një plan të pjerrët. Në këtë tetraedër faqja e pjerrët modelon sipërfaqen elementare  $dA$  të fig. 1.2. Në fig. 1.4 tregohen edhe vektori i sforcimit  $\mathbf{t}$ , normalja  $\mathbf{n}$  e faqes  $dA$  si dhe sipërfaqet e tjera të tetraedrit:

$$dA_1 = dA n_1; \quad dA_2 = dA n_2; \quad dA_3 = dA n_3 \quad (1.5)$$

të cilat në formë të përgjithësuar shprehen si:

$$dA_i = dA n_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

Te (1.5) dhe (1.6)  $n_1, n_2, n_3$  janë projeksionet e vektorit  $\mathbf{n}$  në akset 1, 2, 3 (kosinuset drejtuese të atij vektori).

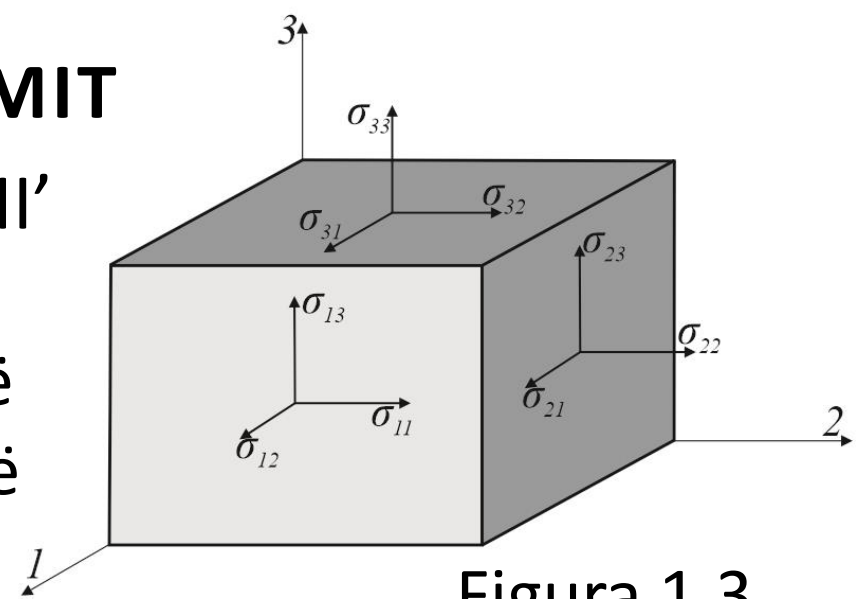


Figura 1.3

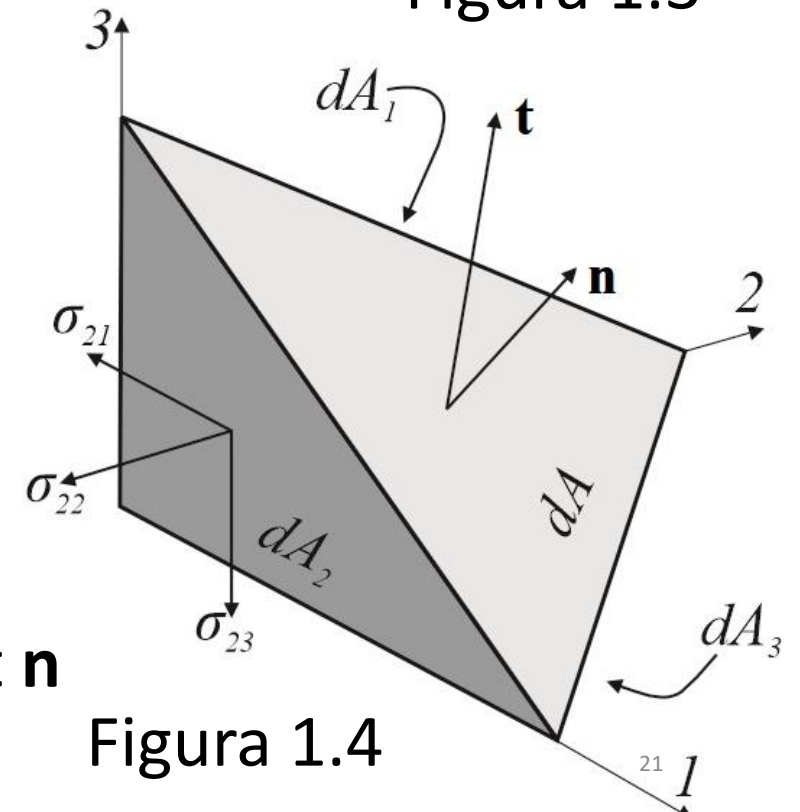


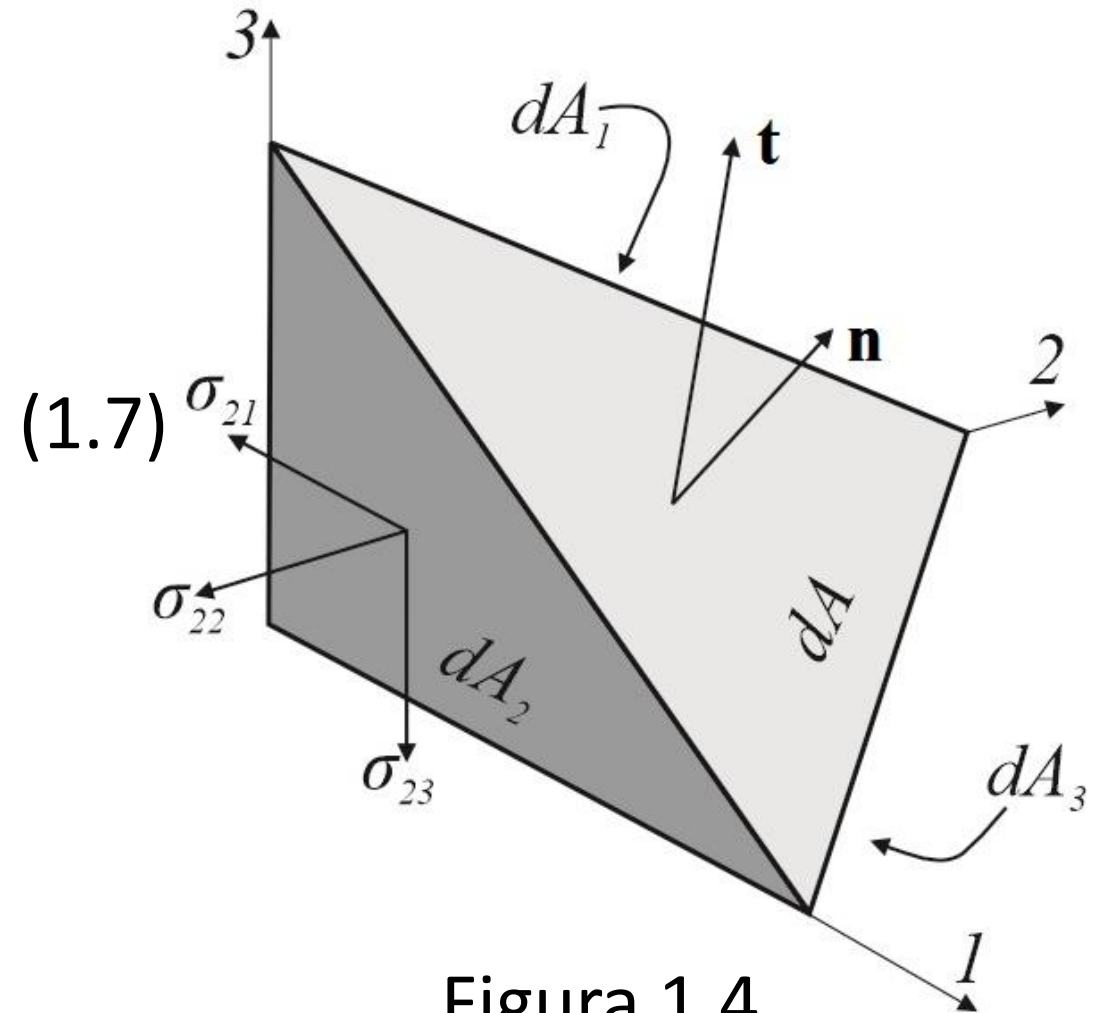
Figura 1.4

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Nga kushtet e ekuilibrit marrim:

$$\begin{cases} t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ t_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ t_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases}$$



# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Në formë koncize barazimi (1.7) shkruhet:

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j \quad (\text{me } i=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Barazimi (1.8) njihet si “*ekuacioni Koshi*” ose shprehja e “*teoremës Koshi*”.

Në krahun e djathtë, madhësitë  $\sigma_{ji}$  janë elemente të matricës të transponuar  $[\boldsymbol{\sigma}]^T$ .

Por,  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ . Prandaj, barazimi (1.8) është ekuivalent me barazimin vijues:

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \quad (\text{për } i=1, 2, 3) \quad (1.9)$$

Në formë matricore ekuacioni (1.8) do të shkruhej:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\sigma}]^T \{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

ku në matricën-shtyllë  $\{t\}$  janë tri komponentet e sforcimit  $\vec{t} \equiv \mathbf{t}$ , kurse në matricën-shtyllë  $\{n\}$  – tri komponentet e vektorit njësi  $\vec{n} \equiv \mathbf{n}$ .

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Por, po t'i referohemi barazimit (1.9) mund të shkruajmë edhe shprehjen:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = [\sigma] \{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Nisur nga emërtimi i (1.8) si “*ekuacioni Koshi*’”, edhe tenzori i sforcimit  $\sigma$  quhet “*tenzori Koshi*’ i sforcimit”, ashtu sikurse dhe komponentet e tij  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$  quhen “*sforcimet Koshi*’”.

Ekuacioni Koshi' i shkruar në një nga format e mësipërme tregon që, në se njihet tenzori i sforcimeve  $\sigma_{ij}$  në një pikë, vektori i sforcimit  $t$  që vepron mbi çdo sipërfaqe të hequr në atë pikë mund të përcaktohet në mënyrë univoqe.



# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.1.- VEKTORI I SFORCIMIT DHE EKUACIONI KOSHI'

Komponentet  $\sigma_{ij}$  të tenzorit  $\sigma$  janë me dy indekse, karakteristike kjo për çdo tenzor “*të rendit të dytë*”, ndërkohë që një tenzor i *rendit të parë* sikurse është vektori i sforcimit  $\mathbf{t}$  apo ai i normales njësi  $\mathbf{n}$  i kanë komponentet e tyre me nga një indeks.

Kështu, nga ana matematike ekuacioni Koshi' shpreh atë që nga “*shumëzimi*” i një tenzori të rendit të dytë ( $\sigma$  në këtë rast) me një vektor apo tenzor të rendit të parë ( $\mathbf{n}$  në këtë rast), merret një tenzor tjetër i rendit të parë (vektori  $\mathbf{t}$  i sforcimit, në këtë rast).

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

### • Matrica e transformimit

Në MM, trajtimet analitike ku përdoren tenzorët dhe matricat përmbajnë shpesh operime në të cilat konsiderohet transformimi i sistemit koordinativ fillestar apo “*i vjetër*”  $x_1 - x_2 - x_3$  në një sistem tjetër që cilësohet “*i ri*” dhe që

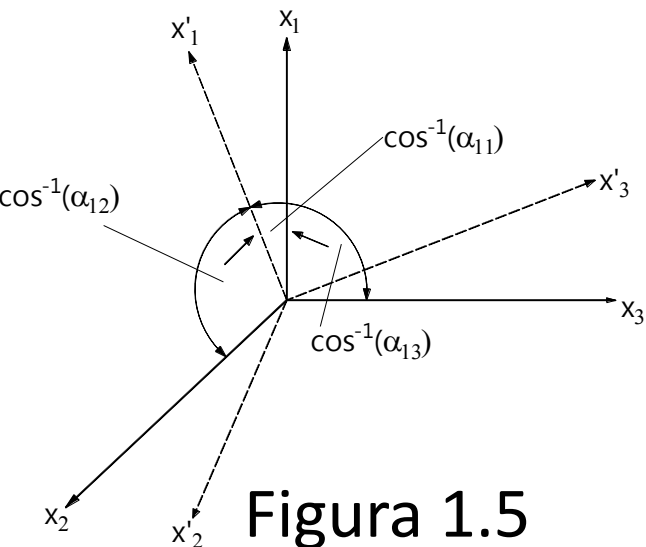
zakonisht shënohet me prim:  $x'_1 - x'_2 - x'_3$  (shih fig. 1.5).

Matrica e formuar me vlerat  $a_{ij} = \cos(x'_i, x_j) = e'_i \cdot e_j$  (1.12)

quhet *matrica e transformimit të koordinatave*”. Kjo është matrica katrore jo-simetrike vijuese:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Figura 1.5



Një rast i thjeshtë tregohet në fig. 1.6 (akset  $x_3, x'_3$  janë të dy të orientuar poshtë), me:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

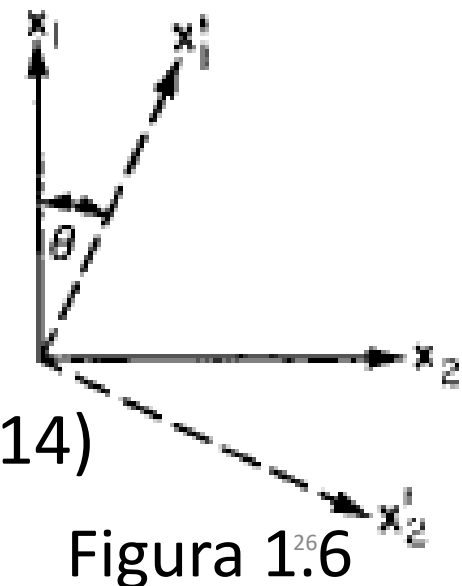


Figura 1.6

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

### • Ligjet e transformimit

Çdo *skalar* nuk ka komponente dhe ruan të njëjtën vlerë në çdo sistem referimi, pa prim ose me prim:  $M' = M$  (1.15)

*Vektori* ose tenzori i rendit të parë i ka komponentet që ndryshojnë me ndryshimin e sistemit të referimit. Për të treguar se si ndryshojnë ato, supozojmë se kemi vektorin e një force  $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{p}$  (fig. 1.7) dhe vërejmë se rruga për të shkuar nga O tek Q është OKLQ, me  $OK = p_1$ ,  $KL = p_2$  dhe  $LQ = p_3$ , ku  $p_1, p_2, p_3$ : komp. e  $\mathbf{p}$  në akset "e vjetër". Shprehim

vektorin  $\mathbf{p}$  si shumë vektoriale sipas "rrugës" OKLQ dhe duke e projektuar në akset "e rinj" barazimin vektorial që rezulton, marrim shprehjet e transformimit të drejtë të vektorëve:

$$\begin{cases} p'_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ p'_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \\ p'_3 = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 \end{cases} \quad (1.16) \quad \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Këto barazime në formë koncize matricore dhe "indeksore" shkruhen:

$$\{p'\} = [a]\{p\} \quad (1.18) \quad \text{dhe} \quad p'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}p_j \quad (\text{për } i=1, 2, 3) \quad (1.19)$$

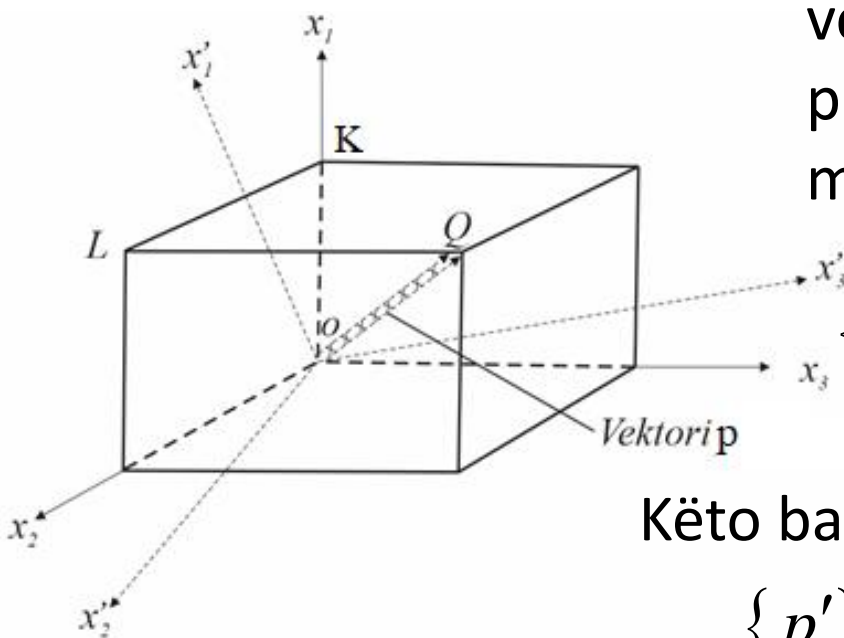


Figura 1.7 (përsht. nga [5])

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

- **Konvencioni i Ajnshtajnit i “shumës sipas indekseve”**

Është futur nga Albert Ajnshtajni për thjeshtimin e paraqitjeve të ekuacioneve të Teorisë së Relativitetit. Konsiston në shmangjen e simbolit të shumatores ( $\sum \dots$ ) kur kjo përmban terma në të cilët shfaqet një indeks që përsëritet e që merr vlera nga 1 deri në një numur të caktuar “ $n$ ”. Ky indeks p.sh. “ $i$ ”, quhet indeks “*fiktiv*”, “*artificial*”, (“*dummy index*”). Indekset që nuk përsëriten quhen “*të lirë*”, “*aktivë*”. Kështu p.sh.

shuma  $\sum_i a_i x_i \equiv \sum_i^n a_i x_i$  shkruhet shkurt  $a_i x_i$ . Ndërkaq, kuptohet se:  $x_i a_i = x_k a_k$  (1.20)

Më poshtë tregohen disa shembuj të tjerë.

$c_{ijk} d_{ik} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 c_{ijk} d_{ik}$  (1.21); ekuacioni  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$  zëvendësohet nga:  $a_{ij} x_j = b_i$  (1.22)

Ekuacioni Koshi'  $t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j$  zëvendësohet nga:  $t_i = \sigma_{ji} n_j$  (1.23)

Transformimi i drejtë i vektorëve (1.19) zëvendësohet nga:  $p'_i = a_{ij} p_j$  (1.24)

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

- **Simboli i Kronekerit ose Delta e Kronekerit (“Kronecker Delta”)**

(sipas matematikanit Leopold Kronecker, 1823 – 1891)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{në se } i = j \\ 0 & \text{në se } i \neq j \end{cases} \quad (1.25) \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nëse } i = j \\ 0, & \text{nëse } i \neq j \end{cases} \quad (1.26) \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (1.27)$$

Jo rrallë, për konvencienë në veprimet algjebrike tenzoriale, simboli i Kronekerit ( $\delta_{ij}$ ) përdoret si “*tenzor i rendit të dytë*”. Në hapësirën tri-përmasore (3-D),  $\delta_{ij}$  paraqitet nga matrica njësi  $\mathbf{1} \equiv [1]$ , me përmasa 3×3

$$\mathbf{1} \equiv [1] = \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Një barazim mjaft i përdorshëm është:  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \quad (1.29)$

Më poshtë jepen edhe disa barazime me  $\delta_{ij}$  në rolin e “*operatorit zëvendësues*” në kombinim me konvencionin e Ajnshtajnit):

$$\delta_{ij} n_j = n_i \quad (1.30); \quad v_j = \delta_{ij} v_i \quad (1.31); \quad v_i = \delta_{ji} v_j \quad (1.32); \quad \delta_{ij} A_{ik} = A_{ik} \quad (1.33)$$

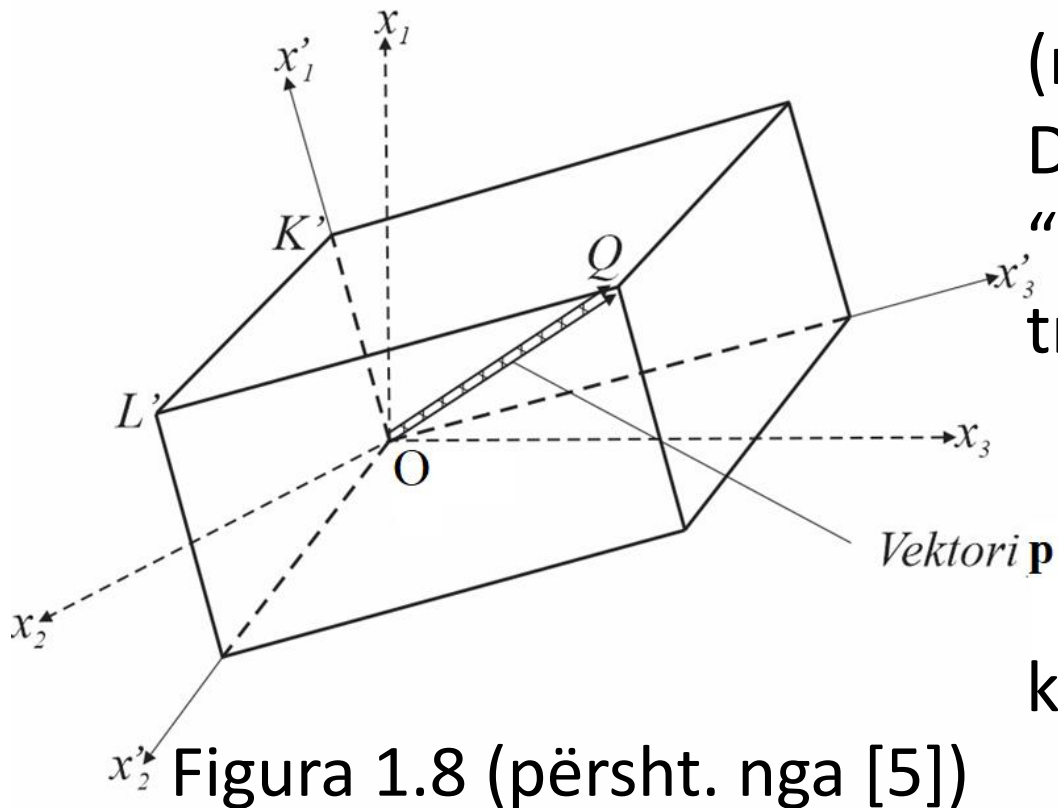
ku  $v_i, v_j$  - komponente të një vektori;  $A_{ik}, A_{jk}$  - komponente të një tenzori.

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

### • Transformimi invers i vektorëve

Kthehemi te “kutia” e fig. 1.7, por tani si në fig. 1.8, ku përftimi i vektorit  $\mathbf{p}$  do të mendohet sipas “itinerarit”  $OK'L'Q$  me  $OK' = p'_1$ ,  $K'L' = p'_2$  dhe  $L'Q = p'_3$  ku  $p'_1, p'_2, p'_3$ : projeksionet e  $\mathbf{p}$  në akset “e rinj” (me prim).



Duke arsyetuar ngjashëm si për transformimin “e drejtë”  $\{p'\} = [a]\{p\}$  (1.18), tani marrim transformimin “invers” të vektorëve:

$$\{p\} = [a]^T \{p'\} \quad (1.34)$$

ku  $[a]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.35)$

Figura 1.8 (përsht. nga [5])

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

### • Transformimi invers i vektorëve

Me konvencionin e shumës sipas indekseve, ky transformim shprehet kështu:

$$p_i = a_{ji} p'_j \quad (\text{për } i, j = 1, 2, 3) \quad (1.36)$$

Një mënyrë e thjeshtë për përfitim të barazimit (1.36):

$$p_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i = (p'_j \mathbf{e}'_j) \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i) p'_j = a_{ji} p'_j \quad (1.37)$$

ku tani:

$$a_{ji} = \cos(x_{j'}, x_i) \quad (1.38) \quad a_{ji} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (1.39)$$

Kemi marrë kështu dy transformime "të kundërta"

$$p'_i = a_{ij} p_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.24)$$

$$p_i = a_{ji} p'_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.36)$$

Barazimet (1.24) dhe (1.36) e definojnë vektorin si "**tenzor i rendit të parë**"

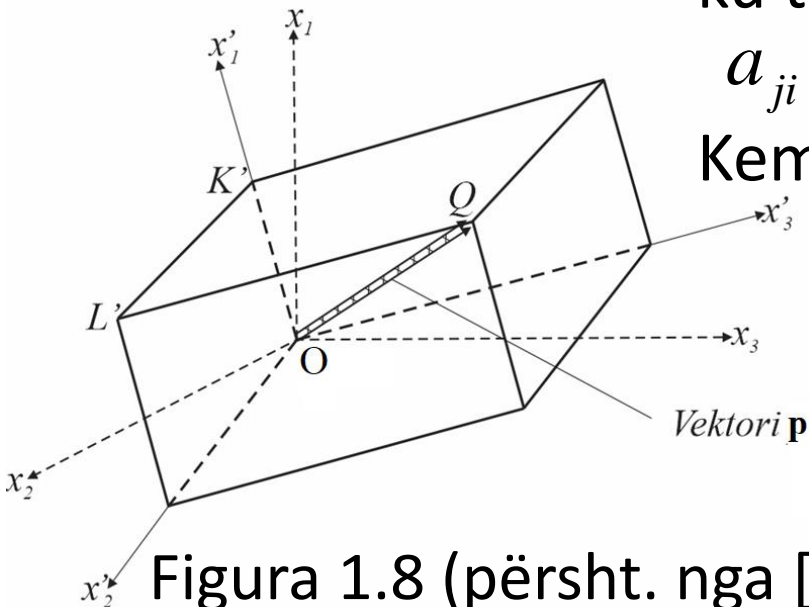


Figura 1.8 (përsht. nga [5])

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

- **Veti të matricave transformuese**

Shumëzimi i matricës transformuese  $[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  (1.13)

me  $[a]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  (1.35) jep matricën njësi  $[1]$ :

$$[a][a]^T = [1] \quad (1.40),$$

ku sipas (1.28)  $[1] \equiv \mathbf{1} = \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Barazimi  $[a][a]^T = [1]$  tregon se  $[a]^T = [a]^{-1}$  (1.41)



# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.2 DISA TRANSFORMIME DHE SIMBOLE MATEMATIKE

### • Vetë të matricave transformuese

Në formë eksplicite vetitë (1.40) dhe (1.41) shprehen me anë të barazimeve vijuese:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \end{array} \right. \quad (1.42)$$

Tre barazimet e para quhen kushtet e normalizimit, tre të fundit: “kushtet e ortogonalitetit”. Matrica [a] i kënaq të dy kushtet dhe prandaj quhet “*matricë ortonormale*”.

Gjashtë marrëdhëniet apo kushtet (1.42) dhe (1.43) tregojnë se nga nëntë kosinuse që përmban matrica [a], vetëm tre prej tyre janë të pavarura.

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Ligji “i drejtë”

Në figurën 1.9 ri-paraqitet kubi “i zakonshëm” elementar me komponentet  $\sigma_{ij}$  të tenzorit të sforcimit  $\sigma$  dhe vektorët korrespondues të sforcimit  $\mathbf{t}^{(i)}$ . Ngjashëm me “ligjet” (1.24) dhe (1.36) për vektorët, tenzorët e rendit të dytë, si tenzori i sforcimit  $\sigma$  etj., kanë ligjet e tyre të transformimit.

Për të nxjerrë këto “ligje”, për tenzorin  $\sigma$  ka disa mënyra (qasje), që bazohen ose në koncepte me karakter fizik (ekuilibri i një tetraedri elementar) ose në koncepte me karakter matematik (produkti skalar i vektorëve).

Në vijim do të përdoret qasja e parë.

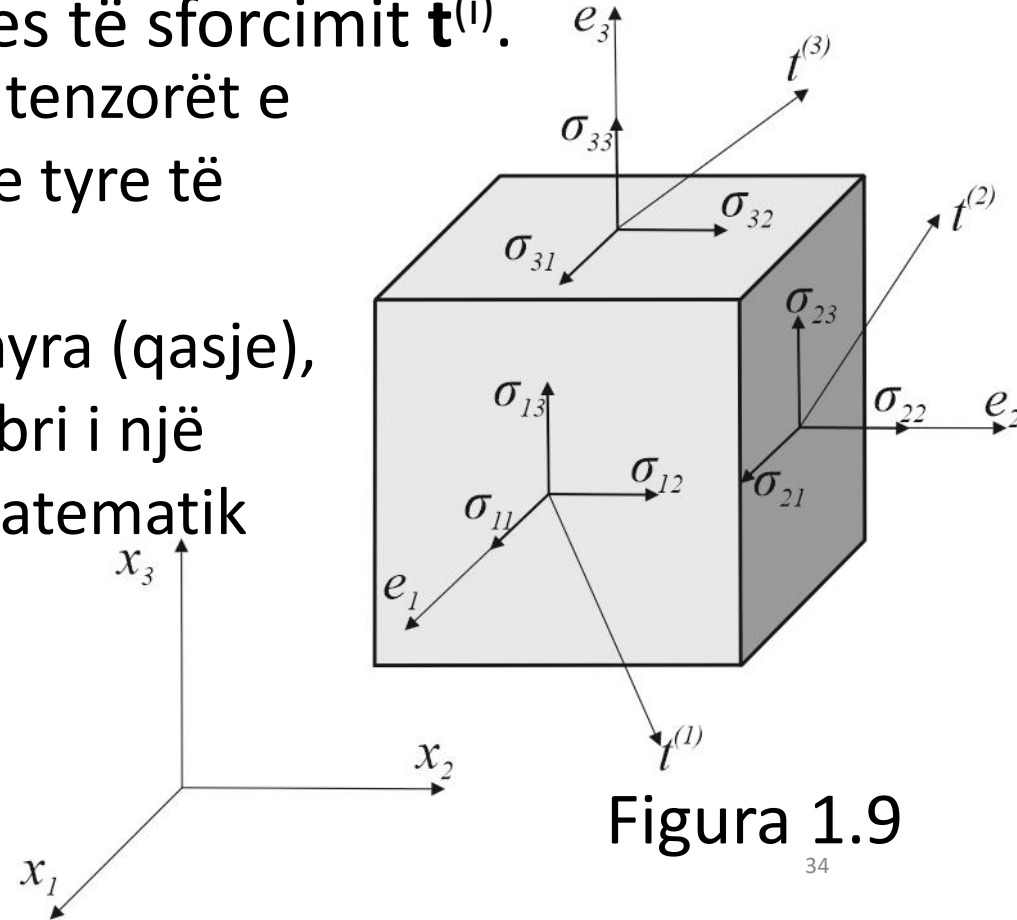


Figura 1.9

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Kështu le të konsiderojmë ekuilibrin e tetraedrit elementar të fig. 1.10 të prerë nga kubi i fig. 1.9, duke iu referuar dy sistemeve koordinativë: “*i vjetër*”  $x_1, x_2, x_3$  dhe “*i ri*”  $x'_1, x'_2, x'_3$ . Aksi  $x'_1$  përputhet me normalen në faqen e pjerrët:  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}'_k$  (1.44), kurse akset  $x'_2$  e  $x'_3$  janë në fq. e pjerrët.

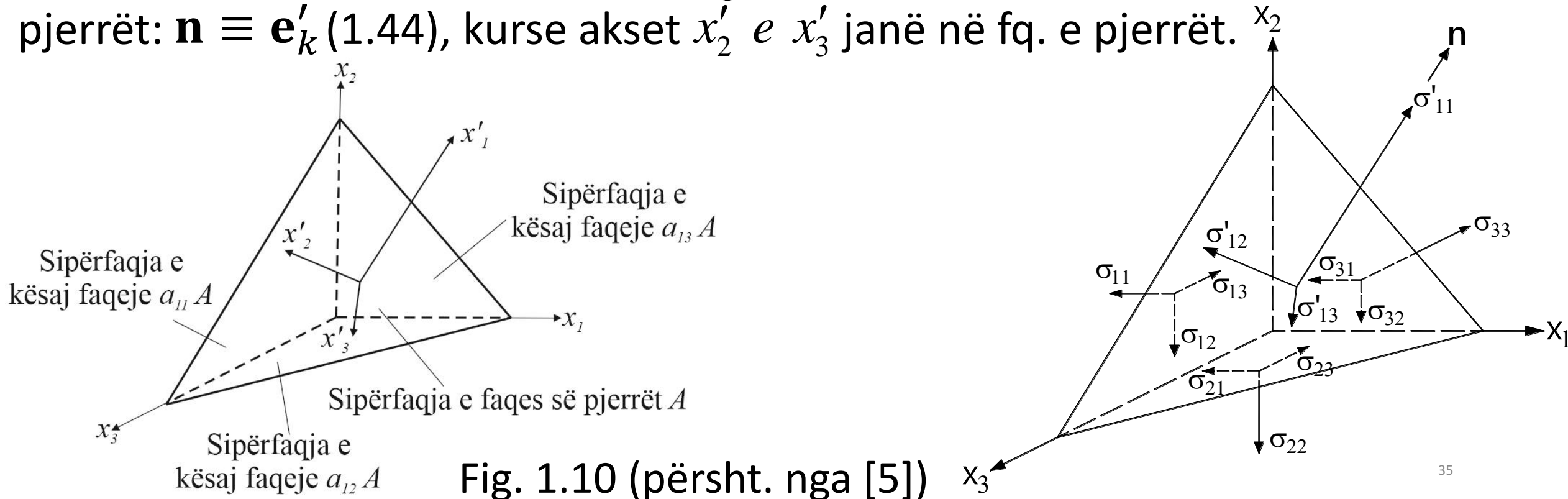


Fig. 1.10 (përsht. nga [5])

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Ngjashëm shqyrtohen dhe dy tetraedra të tjerë: njëri me faqe të pjerrët me normale aksin  $x'_2$ , tjetri me faqe të pjerrët me normale  $x'_3$ .

Referuar sistemit të "ri", nëntë komponentet e sforcimit janë:  $\sigma'_{kl}$  ( $k', l' = 1', 2', 3'$ ) kështu, referuar këtij sistemi vektori i sforcimit në fq. e pjerrët është:

$$\mathbf{t}^{(k')} = \sigma'_{k1} \mathbf{e}'_1 + \sigma'_{k2} \mathbf{e}'_2 + \sigma'_{k3} \mathbf{e}'_3 = \sigma'_{kl} \mathbf{e}'_l \quad (1.45)$$

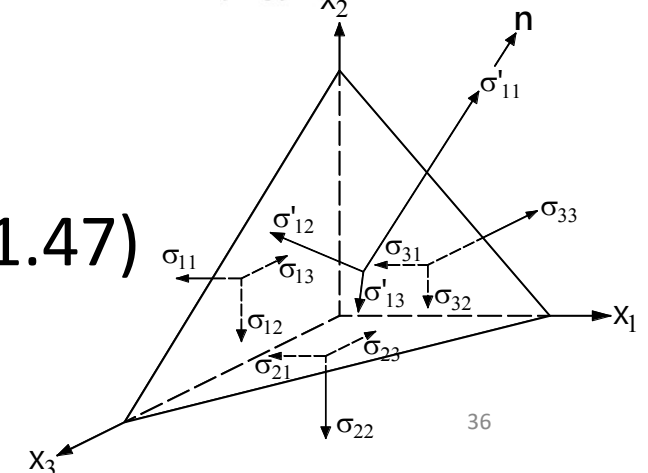
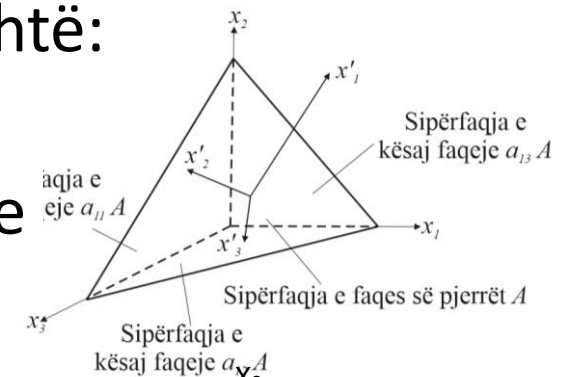
Ndërkaq, vektorin  $\mathbf{t}^{(k')}$  mund ta shprehim edhe me komponentet e tij referuar sistemit "të vjetër" koordinativ, si:

$$\mathbf{t}^{(k')} = \sum_{j=1}^3 t_j \mathbf{e}_j \quad (1.46)$$

Nga zv. i (1.46) te (1.45), dhe apl. i teor. Koshi' si:  $t_j = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} n_i$  (1.47)

marrim:

$$\mathbf{t}^{(k')} = \sum_{j=1}^3 t_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_{ij} \right) \mathbf{e}_j \quad (1.48)$$



# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Shumëzojmë të dy krahët e (1.45) me  $\mathbf{e}'_l$  ( $l' = 1', 2', 3'$ ) dhe kemi  $\mathbf{e}'_l \cdot \mathbf{t}^{(k')} = \sigma'_{kl}$  (1.49)

Shumëzojmë (1.48) me  $\mathbf{e}'_l$ , e duke konsideruar që  $\mathbf{n} = \mathbf{e}'_k$ , pra  $n_i = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i$ , marrim:

$$\mathbf{e}'_l \cdot \mathbf{t}^{(k')} = \mathbf{t}^{(k')} \cdot \mathbf{e}'_l = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_{ij} \right) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_l = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}'_l \cdot \mathbf{e}_j) \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ki} a_{lj} \sigma_{ij} \quad (1.50)$$

Përfundimisht, duke krahasuar (1.49) me (1.50), vërejmë se:

$$\sigma'_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ki} a_{lj} \sigma_{ij} \quad (1.51) \text{ ose, me konvenc. e Ajnshtajnit: } \sigma'_{kl} = a_{ki} a_{lj} \sigma_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.52)$$

Duke përgjithësuar shënimet te (1.51) e (1.52) kemi:  $a_{pq} = \mathbf{e}'_p \cdot \mathbf{e}_q$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ) (1.53)

Ky është “ligji i transformimit” (“i drejti”) ose *ekuacioni i tenzorit të sforcimit*.

Këtu kujtojmë që matrica transformuese  $[a] \equiv \mathbf{a}$  është ortonormale:

$$[a]^T [a] = [a][a]^T = [1] \quad (1.54)$$

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Në formën matricore, ligji i transformimit “të drejtë” (1.52) i tenzorit  $\sigma$  shkruhet:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} & \sigma'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(y', x) & \cos(z', x) \\ \cos(x', y) & \cos(y', y) & \cos(z', y) \\ \cos(x', z) & \cos(y', z) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

ose në formë koncize:  $[\sigma'_{kl}] = [a_{ki}][\sigma_{ij}][a_{lj}]^T \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.56)$

Matricat  $[\sigma'_{kl}]$  dhe  $[\sigma_{ij}]$  shprehin të njëjtin tenzor sforcimi  $\sigma$ . Forma “*matricore*” e shprehjes së tenzorëve është praktikisht e përshtatshme të bëhet deri te rendi i dytë i tyre. Referuar hapësirës 3-D, paraqitja matricore e komponenteve të një tenzori të rendit të tretë kërkon një “kuti kubike”  $3 \times 3 \times 3$ , mënyrë kjo jo e përshtatshme paraqitjeje, por gjithsesi e mundshme (në limit) që të vizualizohet.

Forma matricore e transformimit të një tenzori çfarëdo  $\mathbf{T}$  të rendit të dytë është:

$$[T'_{kl}] = [a_{ki}][T_{ij}][a_{lj}]^T \quad (\text{me } i, j \text{ dhe } k, l = 1, 2, 3) \quad (1.57)$$

Përmbajtja e (1.57) është ekuivalente me atë të barazimit vijues, shkruar me simbolikën

“indeksore”:

$$T'_{kl} = a_{ki} a_{lj} T_{ij} \quad (1.58)$$

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Zakonisht, një tenzor  $\mathbb{T}$  i rendit  $m$  konsiderohet i rendit të lartë kur  $m > 2$ .

Ky tenzor është objekt matematik që i ka komponentet me “ $m$ ” indekse, të cilat transformohen sipas “*ligjit*” vijues: 
$$\mathbb{T}'_{p_1 p_2 \dots p_m} = a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \dots a_{p_m q_m} \mathbb{T}_{q_1 q_2 \dots q_m} \quad (1.59)$$

Nëse kemi një tenzor të rendit të gjashtë, p.sh.  $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}_{pqrst u}$ , atëherë, sipas [5]:

$$\mathbb{T}'_{abcdef} = a_{ap} a_{bq} a_{cr} a_{ds} a_{et} a_{fu} \mathbb{T}_{pqrst u} \quad (1.60)$$

Në MM përdorim të gjerë, në veçanti për të shprehur ligjin e përgjithësuar të Hukut, ka tenzori i rendit të katërt i ngurtësisë së materialit  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_{ijkl}$ , me komponente me katër indekse. Në hapësirën 3-D përmasat e “*matricës*” së tij do të ishin  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ , çka praktikisht është e pamundur të vizualizohet.

Me *simbolikën indeksore*, ligji i *transformimit të drejtë* të tenzorit  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_{ijkl}$  shkruhet:

$$\mathbb{C}'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \mathbb{C}_{mnpq} \quad (i, j, k, l \text{ dhe } m, n, p, q = 1, 2, 3) \quad (1.61)$$

# 1. TENZORI I SFORCIMIT

## 1.3 DEFINIMI I TENZORIT TE SFORCIMIT

- **Ligjet e transformimit**

Përdorim të gjerë kanë edhe *transformimet e anasjellta (inverse)* të tenzorëve. Në formë të përmbledhur mund të shkruajmë:

### Transformimi i drejtë

Një vektor (**p**)  $p'_i = a_{ij} p_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.24)$

Tenzori  **$\sigma$**   $\sigma'_{kl} = a_{ki} a_{lj} \sigma_{ij} \quad (1.52)$

### Transformimi invers

$$p_i = a_{ji} p'_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.36)$$

$$\sigma_{ij} = a_{ki} a_{lj} \sigma'_{kl} \quad (1.62)$$

$$\text{Tenzori } \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}_{pqrst} \quad \mathbb{T}'_{abcdef} = a_{ap} a_{bq} a_{cr} a_{ds} a_{et} a_{fu} \mathbb{T}_{pqrst} \quad (1.60)$$

$$\mathbb{T}_{pqrst} = a_{ap} a_{bq} a_{cr} a_{ds} a_{et} a_{fu} \mathbb{T}'_{abcdef} \quad (1.63)$$



## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.1 PËRCAKTIME BAZË MBI DEFORMACIONET

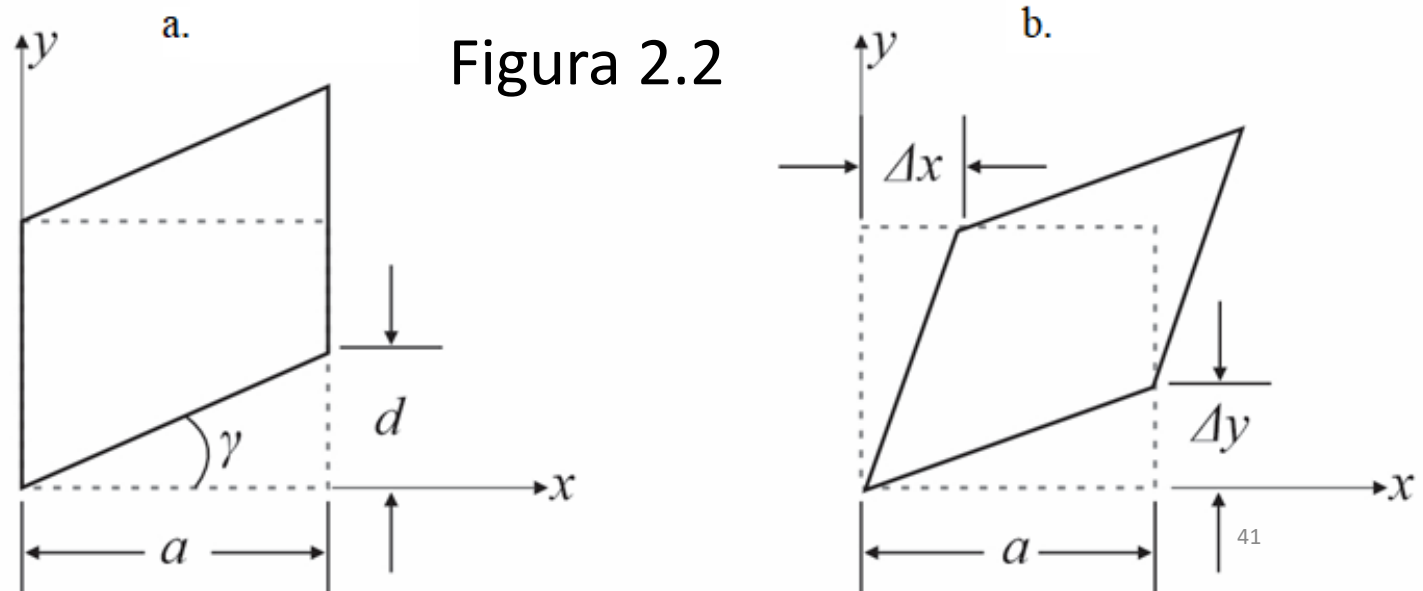
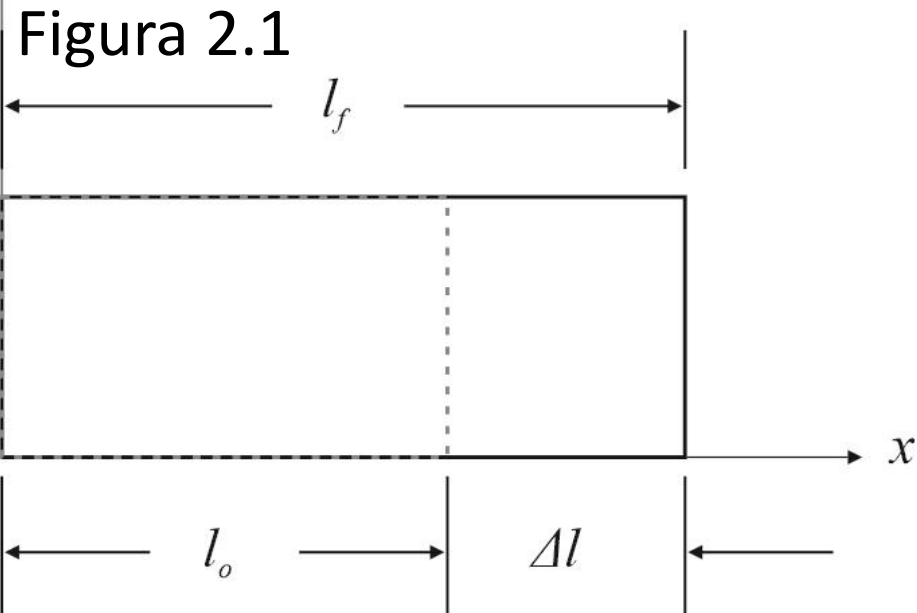
- **Kujtesa - Shprehjet e deformacioneve në raste të thjeshta** (fig. 2.1 dhe 2.2-a, b)

Deformacioni “gjatësor” (“normal”, “i drejt-për-drejtë”)  $\varepsilon$  (shih fig. 2.1)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  (2.1)

$\varepsilon$  - pa përmasa, jepet si numur dhjetor, p.sh.  $\varepsilon = 0.015$ , ose në %:  $\varepsilon = 1.5\%$ .

Deformacionii prerjes (“i rrëshqitjes”, “tangencial”),  $\gamma$ , është këndi i definuar si:

Fig. 2.2-a  $\gamma = \frac{d}{a}$  (2.2);      Fig. 2.2-b  $\gamma = \frac{\Delta x + \Delta y}{a}$  (2.3) me  $\Delta x = \Delta y = \frac{d}{2}$  (2.4)



## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.1 PËRCAKTIME BAZË MBI DEFORMACIONET

- **Definime përgjithësuese (rigoroze) të deformacioneve**

Janë të domosdoshme në se janë prezente të dy llojet e deformacioneve, *normal* dhe *i prerjes*. Përdoren derivatet e funksioneve të zhvendosjeve “*u*” sipas akseve.

Deformacioni gjatësor: 
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.5)$$

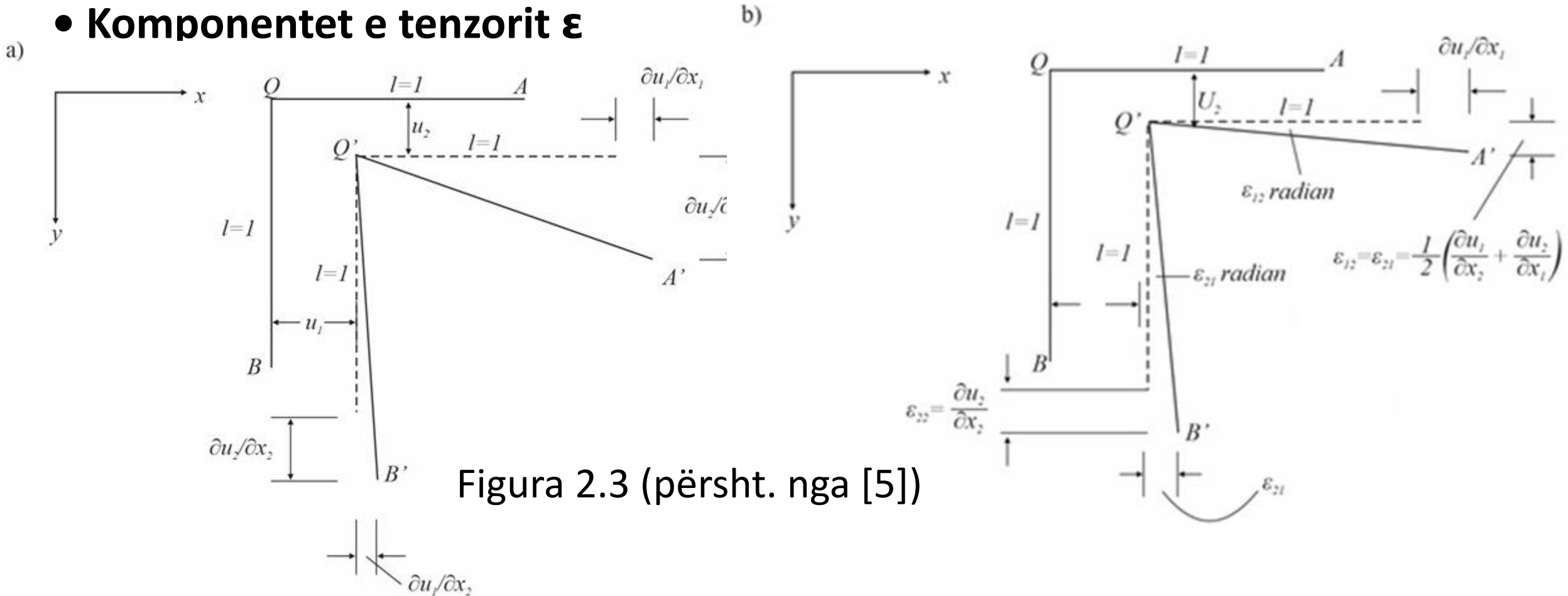
Deformacioni i prerjes: 
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.6)$$

Paraprkisht vërejmë se në definimin “*matematik*” të tenzorit të deformacionit “*deformacioni tenzorial*” i prerjes  $\varepsilon_{xy}$  konsiderohet madhësia (1/2)  $\gamma$ . Këndi  $\gamma$  është “*deformacioni inxhinierik*” i prerjes.

## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.2 DEFINIMI I TENZORIT TË DEFORMACIONIT $\epsilon$

#### • Komponentet e tenzorit $\epsilon$



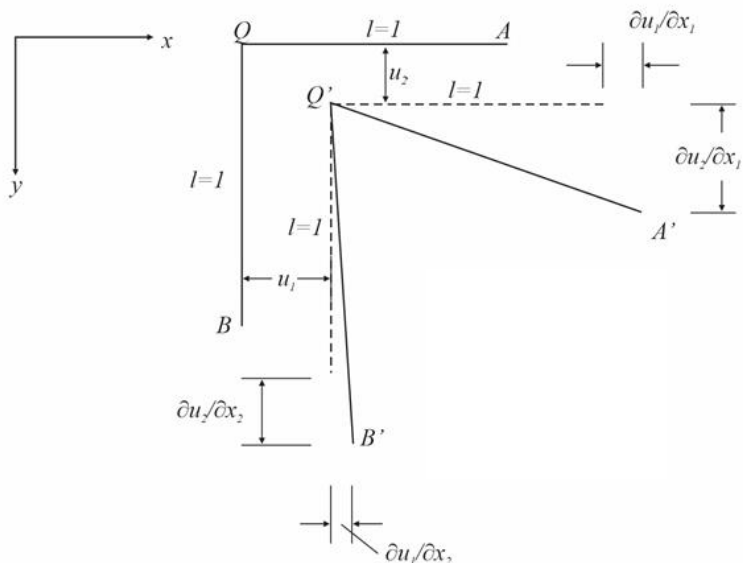
Në fig. 2.3-a tregohen zhvendosjet dhe deformimet në një pikë Q të një trupi, të vlerësuara nga lëvizjet e një elementi të përthyer këndrejtë AQBO (me  $QA=QB=l=1$ ), i cili kalon në pozicionin A'Q'B'.

## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.2 DEFINIMI I TENZORIT TË DEFORMACIONIT $\epsilon$

#### • Komponentet e tenzorit $\epsilon$

a)



Kërkojmë deformacionet elastike, prandaj nga fig. 2.3-a hiqet pjesa e lëvizjes rrotulluese si trup i ngurtë: merret skema e fig. 2.3-b, ku përgjysmorja e këndit  $A'Q'B'$  - paralele me përgjysmoren e këndit  $AQB$ .

Referuar akseve  $1 \equiv x_1 \equiv x$  dhe  $2 \equiv x_2 \equiv y$ , deformacionet normale definoohen nga:  $\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ ,  $\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$  (2.7) kurse ato të prerjes nga:

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.8)$$

Për probl. plane (2-D):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.9)$$

Për probl. hapsinore (3-D):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.10)$$

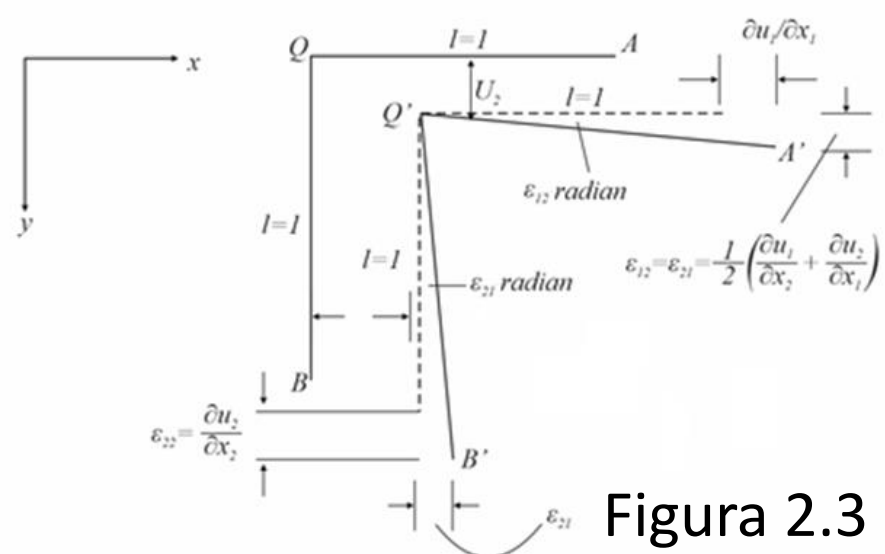


Figura 2.3 (përsht. nga [5])

## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.2 DEFINIMI I TENZORIT TË DEFORMACIONIT $\boldsymbol{\varepsilon}$

- **Kushti “tenzorial”** - *Shprehjet indeksore*

Demonstrohet se në tërësinë e tyre deformacionet e përcaktuara nga (2.9) apo (2.10) e kënaqin “*ligjin*” e transformimit të drejtë për të “*përfaqësuar*” një tenzor të rendit të dytë. Pra, demonstrohet që:

$$\varepsilon'_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ki} a_{lj} \varepsilon_{ij} \quad (2.11)$$

ose në formë më koncize, duke përdorur konvencionin e shumës sipas indekseve:

$$\varepsilon'_{kl} = a_{ki} a_{lj} \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ dhe } k, l = 1', 2', 3') \quad (2.12)$$

Kështu definohet tenzori simetrik i deformacionit  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Sikurse sforçimi  $\boldsymbol{\sigma}$ , edhe deformacioni  $\boldsymbol{\varepsilon}$  kënaq “*ligjin*” e transformimit invers.

## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.2 DEFINIMI I TENZORIT TË DEFORMACIONIT $\epsilon$

- Kushti “tenzorial” - *Shprehjet matricore*

Matrica që shpreh tenzorin e deformacionit  $\epsilon$  (në problemin 3-D) është:

$$[\epsilon] \equiv [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$\epsilon_{ii}$  - deformacionet gjatësore;  $\epsilon_{ij}$  (me  $i \neq j$ ) - deformat. “tenzoriale” të prerjes. Në traditën inxhinierike prerja shprehet me këndin:  $\gamma_{ij} = (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) = 2\epsilon_{ij}$  (2.14)

P.sh.:  $\gamma_{12} = \epsilon_{12} + \epsilon_{21} = 2\epsilon_{12}$  (2.15)

Kjo lidhet me faktin që në ligjin e Hukut për prerjen është këndi  $\gamma_{ij}$  dhe jo  $\epsilon_{ij}$ :  $\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$  (2.16)

Duke përfshirë edhe shënimet  $x, y, z$  për akset koordinativë, shprehjet matricore të tenzorit  $\epsilon$  mund të jepen me paraqitjet ekuivalente vijuese:

$$\epsilon \equiv [\epsilon] \equiv [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

## 2. TENZORI I DEFORMACIONIT

### 2.2 DEFINIMI I TENZORIT TË DEFORMACIONIT $\epsilon$

- Kushti “tenzorial” - *Shprehjet matricore*

Më poshtë janë shprehjet matricore të ligjit të transformimit (2.11) ose (2.12):

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_{xx} & \epsilon'_{xy} & \epsilon'_{xz} \\ \epsilon'_{xy} & \epsilon'_{yy} & \epsilon'_{yz} \\ \epsilon'_{xz} & \epsilon'_{yz} & \epsilon'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(y',x) & \cos(z',x) \\ \cos(x',y) & \cos(y',y) & \cos(z',y) \\ \cos(x',z) & \cos(y',z) & \cos(z',z) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ose shkurt:  $[\epsilon'_{kl}] = [a_{kl}][\epsilon_{ij}][a_{lj}]^T \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ dhe } k, l = 1', 2', 3')$  (2.19)

Duke konsideruar simetrinë  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ , informacioni i matricës 3x3  $\epsilon \equiv [\epsilon_{ij}]$  i (2.13) mund të jepet në formë kompakte me vektorin vijues  $\{\epsilon\}$ , me përmasa 6x1:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \{\epsilon\} \equiv \epsilon \quad (2.20) \quad \epsilon = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}]^T \quad (2.21)$$

Por, renditja e tre termave të fundit të (2.19) mund të ndryshojë - shih (3.11) dhe (3.13).

# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.1 DISA CILËSI KRYESORE TË MATERIALEVE

- **Kuptime kryesore**

Cilësitë fiziko-mekanike janë të njohura nga RM dhe TE. Në vijim ri-kujtohen shkurt disa prej tyre.

*Të vazhdueshëm* janë materialet që karakterizohen nga e njëjta “fazë”, e ngurtë apo fluide; materialet poroze p.sh. nuk janë të vazhdueshëm.

*Elastik* është ai material në të cilin deformacionet varen vetëm nga vlerat aktuale të sforcimeve dhe jo nga “historia” e tyre. Gjatë ngarkim-shkarkimit të këtij materiali nuk shfaqen kurba “*histerezis*”: nuk ka humbje energjie.

*Linear* është materiali ku “efekti” për shkak të ngarkimit, d.m.th. ndryshimi i deformacionit, është proporcional me “shkakun”, d.m.th. me ndryshimin e sforcimit.



# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.1 DISA CILËSI KRYESORE TË MATERIALEVE

- **Kuptime kryesore**

*Homogjen* është materiali ku cilësitë nuk varen nga pozicioni i pikës Q në shqyrtim, ( $\mathbf{x}_Q$ ). Përndryshe, materiali është *jo-homogjen* ose *heterogjen*.

Ndryshimi midis dy materialeve pasqyrohet në ligjin konstitutiv sforcime-deformacione ( $\boldsymbol{\sigma}$ - $\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Materiali *jo-homogjen*:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}; \mathbf{x}_Q) \quad (3.1)$$

Materiali *homogjen*:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}) \quad (3.2)$$

Teorikisht, të gjithë materialet janë heterogjenë. Të tillë janë veçanërisht materialet kompozite, betoni p.sh. Megjithëkëtë, mjaft materiale që nuk janë me heterogjenitet të theksuar ose që e kanë këtë cilësi në shkallë mikroskopike dhe nuk e shfaqin ndjeshëm në shkallë makroskopike shpesh, për thjeshtësi, konsiderohen homogjenë; p.sh., çeliku konsiderohet homogjen, ndonëse ka strukturë mikroskopike heterogjene.

# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.1 DISA CILËSI KRYESORE TË MATERIALEVE

*Izotrop* është materiali në të cilin, referuar një drejtimi, cilësi të tilla si moduli i Jungut " $E$ " etj. nuk ndryshojnë nga ato të një drejtimi tjetër. Në këtë material nuk ka drejtim "*preferencial*" apo "*më sensitiv*" se të tjerët. Materialet që nuk janë *izotropë* quhen *anizotropë*. Te materialet izotrope, sikurse arsyetohet edhe lidhur me homogjenitetin dhe jo-homogjenitetin, konsiderohet që anizotropitë në shkallë mikroskopike kompensojnë ("eliminohen") njëra-tjetrën, duke bërë kështu që, në tërësi apo në shkallë makroskopike, materiali të konsiderohet izotrop. Në natyrë *nuk ka materiale absolutisht izotropë*. Por, shpesh në praktikën inxhinierike analizat e gjendjes së sforcuar dhe të deformuar mbështeten, për më thjeshtë, në supozimin që materiali është izotrop. Kjo mund të përlligjet në se rezultatet e analizave me supozimin e materialit izotrop dhe përkatësisht anizotrop kanë përafërsi të pranueshme.

Shumë materiale ndërtimore janë ose konsiderohen *izotropë*, *metalet* p.sh. Edhe *betoni*, ndryshe nga *betonarmeja*, shpesh konsiderohet *izotrop*.

# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.1 DISA CILËSI KRYESORE TË MATERIALEVE

Në materialet anizotropë cilësitë apo karakteristikat fiziko-mekanike janë të varura nga drejtimi. P.sh. materiali i një *flete laminat çeliku* është *elastik, linear, homogjen, por jo-izotrop, pra anizotrop*. P.sh. moduli i Jungut ka vlera të ndryshme në drejtime të ndryshme. *Druri* është një shëmbull tjetër i materialeve *anizotropë*: ai është më i fortë në drejtim të fibrave se sa në drejtimin normal me 'to. Në MM, për të lehtësuar analizat e strukturave me materiale të ndryshme anizotrope aplikohen kategorizime të materialeve, sipas shkallës së anizotropisë së tyre. Kështu, dallohen mes tyre materialet anizotropë që janë *ortotropë, me izotropi tërthore, me izotropi kubike* etj. Në vartësi të afërsisë që kanë këto materiale me materialin izotrop, *ulet shkalla e kompleksitetit të metodikave llogaritëse* përkatëse.

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.1 DISA CILËSI KRYESORE TË MATERIALEVE - *Shembuj*

Në fig. 3.1 tregohen disa materiale me shkallë të ndryshme anizotropie. Figura 3.1-a tregon një “*laminë*” të petëzuar metalike ortotrope, e prodhuar nga kalimi i metalit të trashë midis rulave të rëndë që e shtypin dhe e petëzojnë.

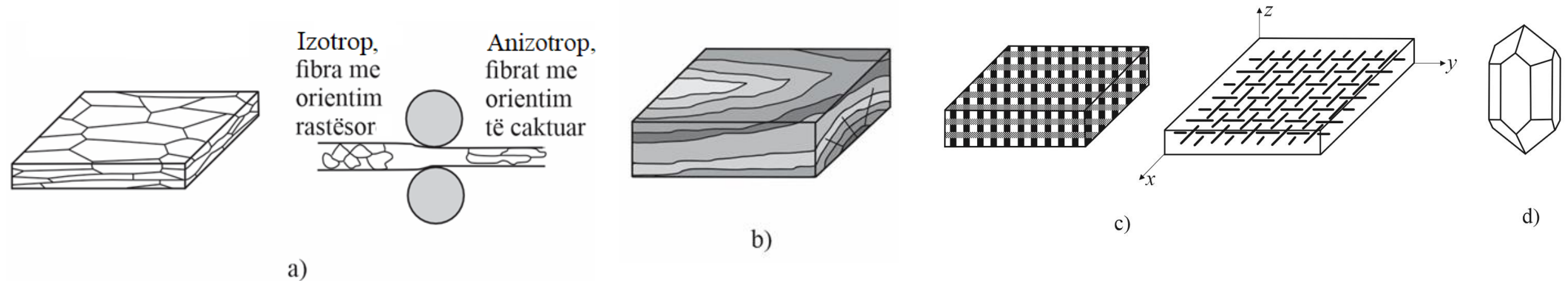


Figura 3.1 (përsht. nga [9], [10])

Në fig. 3.1-b - një pllakë *druri*, edhe ky material *ortotrop*. Në fig. 3.1-c - një *laminë* kompozite me fibra xhami dhe “*matricë*” rrëshirë (“*epoxy*”), e konsideruar zakonisht “*ortotrope*”, por që mund të kategorizohet dhe si “*me izotropi tërthore*”.

Në fig. 3.1-d - një kristal *triklin*, që karakterizohet nga anizotropia e plotë.

# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Marrëdhënia lineare $\sigma$ - $\epsilon$*

Baza e TE dhe MM: Ligji linear i Hukut. Shprehja matematike për rastin 1-D:

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.3)$$

formular më 1678, nga Robert Hooke (1635-1703).

Marrëdhënia lineare  $\sigma$ - $\epsilon$  mund të duket dhe cilësohet si e “*idealizuar*”, jo fort praktike; por, ky cilësim u përshtatet disa strukturave ndërtimore si beton-arme’, metalike etj., që u nënështrohen forcave të jashtme relativisht të mëdha.

Ndërkaq për strukturat “*kompozite*” tip *laminat* sjellja elastike lineare është përgjithësisht reale. Shpjegimi: shkatërrimi eventual më së shumti ndodh përpara se të shfaqen deformacionet inelastike (plastike). Kjo veçori ka motivuar më tepër edhe elaborimin e thelluar të teorisë elastike lineare, ku supozohet se deformacionet varen në mënyrë univoke nga sforcimet.

Një komponent sforcimi mund të prodhojë disa komponente deformacioni (deri në 9). Shembull: dukuria që lidhet me koeficientin e Puasonit.

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Marrëdhënia lineare $\sigma$ - $\epsilon$*

Me konvencionin e shumës sipas indekseve, për materialet elastike lineare marrëdhëniet  $\sigma$ - $\epsilon$  dhe  $\epsilon$ - $\sigma$ , si shprehje tenzoriale - indeksore të ligjit të përgjithësuar të Hukut, mund të shkruhen kështu:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Në fakt, shprehjet rigorozë tenzoriale përkatëse shkruhen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{dhe} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.5)$$

ku shenja (:) tregon produkt “të dyfishtë” skalar (term dhe nocion ky i Algjebrës së tenzorëve) midis tenzorëve  $\mathbb{C}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$  dhe  $\mathbb{S}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Tenzorët C edhe S*

Të dy tenzorët  $C$  dhe  $S$ , përkatësisht të ngurtësisë dhe fleksibilitetit të materialit përcaktohen në hapësirën 3-D (pra  $N=3$ ) dhe janë të rendit të katërt ( $m=4$ ), rrjedhimisht i kanë komponentet me katër indekse. Prandaj secili prej tyre ka 81 komponente:  $N^m = 3^4 = 81$ . Ata kënaqin ligjin transformues të tenzorëve të këtij rendi. Tenzori  $C$  p.sh. kënaq, sikurse u tregua më sipër, këtë barazim:

$$C'_{ijkl} = a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{lq}C_{mnpq} \text{ (me } i, j, k, l \text{ dhe } m, n, p, q = 1, 2, 3) \quad (1.61) \text{ (p)}$$

Tenzorët  $C_{ijkl}$  dhe  $S_{ijkl}$  janë inversë të njëri-tjetrit. Pra:

$$S = C^{-1} \quad C = S^{-1} \quad C_{ijkl}S_{klmn} = \mathbb{I}_{ijmn} \quad (3.6)$$

ku  $\mathbb{I}_{ijmn} \equiv \mathbb{I}$  tregon tenzorin njësi të rendit të katërt.

Në sistemin SI, komponentet  $C_{ijkl}$  i kanë njësitë  $N/m^2$ , kurse  $S_{ijkl}$  -  $m^2/N$ .

Mbi bazën e (3.4), duke zëvendësuar në mënyrë të përshtatshme indekset, mund të marim shprehje eksplicite për sforcimet dhe deformacionet. P.sh. për deformacionin  $\varepsilon_{11}$  kemi:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1121}\sigma_{21} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33} \quad (3.7)$$

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP –

### LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Matricat C dhe S*

Në hapësirat 2-D dhe 3-D ekuacionet e MVE lineare janë më të ndërlikuara se shprehja e thjeshtë (3.3) e ligjit të Hukut. Për këto mjedise (materiale) përdoren shprehjet e “*ligjit të përgjithësuar të Hukut*”. Në thelb edhe këto shprehin vartësi lineare  $\sigma$ - $\epsilon$ , që janë dhënë më sipër me barazimet (3.4) ose (3.5). Këto barazime shprehin ligjin e përgjithësuar të Hukut në dy versione:

*Versioni i parë*, sipas barazimit të majtë të (3.4):

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.8)$$

që formulohet kështu: “*Në çdo pikë të një MVE, çdo komponente e tenzorit të sforcimit është funksion linear i të gjitha komponenteve të tenzorit të deformacionit*”.

Për një komponente të caktuar sforcimi, p.sh.  $\sigma_{23}$ , shprehja (3.8) jep:

$$\sigma_{23} = C_{2311} \epsilon_{11} + C_{2312} \epsilon_{12} + C_{2313} \epsilon_{13} + C_{2321} \epsilon_{21} + C_{2322} \epsilon_{22} + C_{2323} \epsilon_{23} + C_{2331} \epsilon_{31} + C_{2332} \epsilon_{32} + C_{2333} \epsilon_{33} \quad (3.9)$$



### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Matricat C dhe S*

*Versioni i dytë*, sipas barazimit të djathtë të (3.4): 
$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

Formulimi: “Çdo komponente e tenzorit të sforcimit kontribuon në mënyrë lineare për çdo komponente të tenzorit të deformacionit” (Koshi’, 1829).

Në formë ekuivalente matricore, duke përdorur nocionin e vektorit  $\varepsilon \equiv \{\varepsilon\}$  të (2.20) apo (2.21) si dhe të vektorit korrespondues  $\sigma \equiv \{\sigma\}$  barazimi (3.10) shkruhet:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1113} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1131} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2213} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2231} & S_{2221} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3313} & S_{3312} & S_{3332} & S_{3331} & S_{3321} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2313} & S_{2312} & S_{2332} & S_{2331} & S_{2321} \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1313} & S_{1312} & S_{1332} & S_{1331} & S_{1321} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1213} & S_{1212} & S_{1232} & S_{1231} & S_{1221} \\ S_{3211} & S_{3222} & S_{3233} & S_{3223} & S_{3213} & S_{3212} & S_{3232} & S_{3231} & S_{3221} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3113} & S_{3112} & S_{3132} & S_{3131} & S_{3121} \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2113} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2131} & S_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Shkurt: 
$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.12)$$

(me  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ )

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Matricat C dhe S*

Këtu vërejmë që matrica  $S_{ijkl}$  e (3.11) dhe (3.12) nuk mund të jetë shprehje e tenzorit të fleksibilitetit të materialit  $S \equiv S_{ijkl}$ : sikurse është treguar për këtë tenzor do të duhej një “*matricë*” katër-përmasore  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ , gjë që është praktikisht e pamundur të vizualizohet. Por, megjithkëtë në strukturën ajo matricë i përmbledh të 81 komponentet e tenzorit  $S$ . Ndërkaq, vizimet te (3.11) ndajnë madhësitë “*e pavarura*” të tenzorëve  $\epsilon$  dhe  $\sigma$  (të sipërmet) nga madhësitë “*e varura*” (të poshtmet, që kanë secila një komponentet të barabartë sipër tyre). Mund të tregohet se në formë koncize informacionin e (3.11) e jep ekuacioni matricor vijues, i njohur edhe ky si “*ekuacioni Koshi*”:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1311} & 2S_{1322} & 2S_{1333} & 4S_{1323} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1223} & 4S_{1213} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Ekuacioni (3.13) në formë simbolike mund të shkruhet:  $\epsilon_A = S_{AB} \sigma_B$  (3.14)

# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Matricat C dhe S*

Marrëdhënia inverse e (3.11) është:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2321} \\ C_{1311} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3221} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3121} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

prej ku mund të merret barazimi  
matricor vijues (3.16):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Reduktimi i konstanteve*

Formulimet matricore (3.13) dhe (3.16) tregojnë që numuri i konstanteve elastike = **36**.

Ku mbështetet ky reduktim “*i vogël*”, nga **81** konstante në **36**? Te *simetritë vijuese*:

nga  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  (aksioma Boltzmann) rrjedh  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ , dhe nga  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$  ("ligji i sforcimeve tangenciale të barabarta") rrjedh  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$  (3.17)

Me “*konsiderata energjitike*” nr. i konstanteve ulet akoma (ky quhet reduktimi i “*i madh*”) dhe shkon në **21**. Ku konsistojnë këto konsiderata?

Në shfrytëzimin e një ligji bazë të mjedisit elastik: *puna e forcave të jashtme konservohet si energji potenciale e deformimit elastik*.

“*Densiteti*” i energjisë së deformimit  $\bar{E}_d = \bar{E}_d(\epsilon)$  është energji për njësi vëllimi. Në fig. 3.2 tregohet kurba sforcim-deformacion  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  për një material elastik (jo domosdo linear). “Definimi matematik” i materiali elastik konsiston në vlerësimin e sforcimeve si derivate pjesore të  $\bar{E}_d$ :

$$\frac{\partial \bar{E}_d}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.18), \text{ ku } \bar{E}_d = \bar{E}_d(\epsilon) = \text{Sipërfaqja nën kurbën } \sigma - \epsilon = \int_0^{\epsilon} \sigma(\epsilon) d\epsilon$$

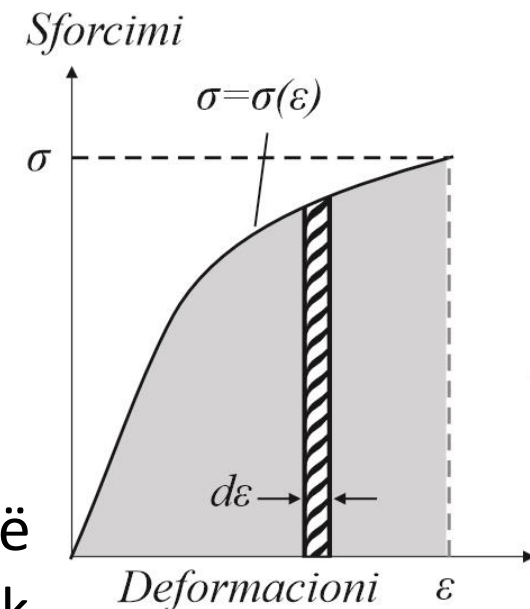


Figura 3.2

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Reduktimi i konstanteve*

Për mat. elastik linear kemi  $\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  (3.8) dhe kështu nga integrali i (3.18) marrim:

$$\bar{E}_d(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \quad (3.19) \quad \text{ose} \quad \bar{E}_d = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (3.20).$$

Nga (3.19) ose (3.20) duket se  $\bar{E}_d$  është polinom i gradës së dytë referuar komponentëve të tenzorit  $\varepsilon_{ij}$ . Duke zëvendësuar te (3.20)  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  marrim:  $\bar{E}_d = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  (3.21)

Shprehja (3.21) njihet si “*teorema e Klaperonit*” (v. 1858), e formuluar sipas fizikanit dhe inxhinierit Benoît Paul Emile Clapeyron (1799-1864).

Shkruajmë shprehjet e mëposhtme:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.4); \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} \quad (3.22) \quad \text{prej ku, duke konsideruar (3.18):} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \bar{E}_d}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (3.23)$$

$$\text{Duke ndërruar indeksat te (3.18) kemi:} \quad \sigma_{kl} = \frac{\partial \bar{E}_d}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (3.24)$$

$$\text{Me veprime të mëtejshme marrim:} \quad \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} = \frac{\partial^2 \bar{E}_d}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.25)$$

$$\text{Nga krahasimi i (3.25) me (3.23) rrjedh se:} \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.26)$$

Ky barazim bën që *numuri i konstanteve* të pavarura të tenzorit  $\mathbb{C}$  (dhe  $\mathbb{S}$ ) ulet nga **36** në **21**.

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Shprehje bazë matricore*

Duke patur parasysh simetritë  $C_{ijkl} = C_{klij}$  barazimi matricor (3.16) shkruhet:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & \text{sim.} & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

ose thjesht:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.28)$$

Në dy shprehjet e mësipërme matrica e ngurtësisë së materialit [C] është matricë simetrike dhe vektori  $\{\varepsilon\}$  grupon 6 deformacionet “inxhinierike” ( $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$  tregojnë këndet e prerjes).

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP –

### LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Shprehje bazë matricore*

Ri-theksojmë se te (3.27) “ka humbur” simbolika tenzoriale e (3.4):  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$

Ndërkaq ngurtësitë  $C_{ijkl}$  të (3.27) mund të kompaktësohen nga me 4 indekse në 2:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & \text{sim.} & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

sipas këtij rregulli ndryshimi apo “*kontraktimi*” indeksesh:

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 13 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6 \quad (3.30)$$

Kjo njihet si “*simbolika Fogt*”, e aplikuar për herë të parë në v. 1910.

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Shprehje bazë matricore*

“*Simbolika Fogt*” përfshin edhe reduktimin e indekseve të sforcimeve dhe deformacioneve, duke i bërë ato 1-indeksore. Kështu p.sh. komponentja  $\gamma_{23}$

e prerjes bëhet  $\varepsilon_4$ : 
$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} = \gamma_{23} \quad (3.31)$$

Me këtë simbolikë, ligji i Hukut shkruhet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{23} \\ \sigma_5 = \sigma_{13} \\ \sigma_6 = \sigma_{12} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 = \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_6 = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

$$\{\sigma\}_{6 \times 1} = [C]_{6 \times 6} \{\varepsilon\}_{6 \times 1} \quad (3.33)$$



### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Shprehje bazë matricore*

Nga invertimi i ekuacionit matricor (3.32), marrim ekuacionin matricor vijues  $\boldsymbol{\varepsilon}$ - $\boldsymbol{\sigma}$ , ku tani evidentohet matrica e fleksibilitetit e materialit  $[S]$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.34) \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Matrica  $[S]$ , sikurse  $[C]$ , është katrore simetrike me **21** *konstante elastike* të pavarura. Nga (3.34), për deformacionet  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  mund të shkruajmë barazimin kompakt matricor:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{6 \times 1} = [S]_{6 \times 6} \{\boldsymbol{\sigma}\}_{6 \times 1} \quad (3.36)$$

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Shprehje bazë matricore*

Matricat  $[C]_{6 \times 6}$  dhe  $[S]_{6 \times 6}$  janë inverse të njëra tjetrës:

$$\mathbf{S} \equiv [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{simetrike} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.37)$$

ose shkurt:  $[S] = [C]^{-1}$  (3.38)

Përveç simetrive që çojnë në reduktimin e numrit të konstanteve nga **81** në **21**, strukturat e materialeve jo plotësisht anizotrope kanë edhe “*simetri materiale*”. Këto simetri bëjnë që matricat  $[C]$  dhe  $[S]$  mund të kenë **< 21** konstante të pavarura apo të ndryshme nga zero, ashtu sikurse do të vërehet më vonë për materialin ortotrop.

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Ndërthurjet midis deformacioneve të ndryshme*

Në matricën e fleksibilitetit të një materiali izotrop pasqyrohen disa veçori që kanë deformacione të ndryshme, lineare dhe të prerjes, të njohura këto si “*ndërthurje*”, “*ndërveprime*” apo thjesht “*lidhje*” (ang. “*coupling*”). Ato kanë ndikimet e tyre në sjelljen (reagimin) e materialit ndaj ngarkesave të jashtme. Këto ndërthurje evidentohen në marrëdhënien  $\epsilon$ - $\sigma$  (3.34), të dhënë si vijon (sipas [15], etj.):

$$\begin{matrix}
 \boxed{\text{Ndërthurja}} \\
 \boxed{\text{zgjatim-zgjatim}}
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 \epsilon_{11} \\
 \epsilon_{22} \\
 \epsilon_{33} \\
 \gamma_{23} \\
 \gamma_{13} \\
 \gamma_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\
 S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\
 S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \sigma_{11} \\
 \sigma_{22} \\
 \sigma_{33} \\
 \sigma_{23} \\
 \sigma_{13} \\
 \sigma_{12}
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \boxed{\text{Ndërthurja}} \\
 \boxed{\text{prerje-zgjatim}}
 \end{matrix}
 \tag{3.39}$$

Zgjatim →  $S_{11}, S_{22}, S_{33}$  (Ndërthurja zgjatim-zgjatim)  
Ndërthurja prerje-zgjatim →  $S_{12}, S_{21}, S_{13}, S_{31}, S_{14}, S_{41}, S_{15}, S_{51}, S_{16}, S_{61}$   
Ndërthurja prerje-prerje →  $S_{23}, S_{32}, S_{24}, S_{42}, S_{25}, S_{52}, S_{26}, S_{62}$   
Prerje →  $S_{34}, S_{43}, S_{35}, S_{53}, S_{36}, S_{63}$

# 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

## 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Ndërthurjet midis deformatacioneve të ndryshme*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Fleksibilitetet e “*pa-ndërthurura*”  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  dhe  $S_{33}$  shkaktohen nga sforcimet normale  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  dhe  $\sigma_3$ , të ushtruara sipas drejtimeve të atyre fleksibiliteteve.

Fleksibilitetet e “*pa-ndërthurura*” prerëse  $S_{44}$ ,  $S_{55}$  dhe  $S_{66}$ , shkaktohen nga sforcime prerëse të aplikuara në planet përkatëse.

Fleksibilitetet  $S_{12}$ ,  $S_{13}$  dhe  $S_{23}$  shprehin “*ndërthurje*” të tipit “*zgjatim-zgjatim*” - “*efekti i Puasonit*”. Analoge me to mund të konsiderohen fleksibilitetet  $S_{45}$ ,  $S_{46}$  dhe  $S_{56}$  që shprehin “*ndërthurje*” të tipit “*prerje-prerje*”, pra shfaqje të deformatacioneve prerëse në plane të ndryshme nga ato të aplikimit të sforcimeve prerëse.

Ndërkaq, fleksibilitetet  $S_{14}$ ,  $S_{15}$ ,  $S_{16}$ ,  $S_{24}$ ,  $S_{25}$ ,  $S_{26}$ ,  $S_{34}$ ,  $S_{35}$  dhe  $S_{36}$  shprehin ndërthurje më të komplikuar, të tipit “*prerje-zgjatim*”.

### 3. CILËSITË E MATERIALEVE – MATERIALI ANIZOTROP – LIGJET KONSTITUTIVE DHE ENERGJIA E DEFORMIMIT ELASTIK

#### 3.2 LIGJI I PËRGJITHËSUAR I HUKUT - *Ndërthurjet midis deformacioneve të ndryshme*

Në vijim, ekuacioni (3.40) shpreh në një formë konkrete ligjin e përgjithësuar të Hukut në versionin  $\boldsymbol{\varepsilon}$ - $\boldsymbol{\sigma}$  për një material me anizotropi të plotë. Aty, në matricën [S]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{41}}{G_4} & \frac{\eta_{51}}{G_5} & \frac{\eta_{61}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{42}}{G_4} & \frac{\eta_{52}}{G_5} & \frac{\eta_{62}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{43}}{G_4} & \frac{\eta_{53}}{G_5} & \frac{\eta_{63}}{G_6} \\ \frac{\eta_{14}}{E_1} & \frac{\eta_{24}}{E_2} & \frac{\eta_{34}}{E_3} & \frac{1}{G_4} & \frac{\mu_{54}}{G_5} & \frac{\mu_{64}}{G_6} \\ \frac{\eta_{15}}{E_1} & \frac{\eta_{25}}{E_2} & \frac{\eta_{35}}{E_3} & \frac{\mu_{45}}{G_4} & \frac{1}{G_5} & \frac{\mu_{65}}{G_6} \\ \frac{\eta_{16}}{E_1} & \frac{\eta_{26}}{E_2} & \frac{\eta_{36}}{E_3} & \frac{\mu_{46}}{G_4} & \frac{\mu_{56}}{G_5} & \frac{1}{G_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

(3.40) termat e “*ndërthurjeve*” të evidentuara te (3.39) janë vlerësuar në termat e “*konstanteve inxhinierike*” E,  $\nu$ , G, si dhe të disa koeficientëve të tjerë specifikë të njohur si “*koeficientët Lekhnitski,  $\eta$* ” dhe “*koeficientët Chenstov,  $\mu$* ”.

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.1 KUPTIME BAZË

- **Simetria si invariancë ndaj transformimeve ortogonale**

Në fusha të ndryshme fizike si dhe në MM simetria e brendshme (materiale) i referohet një pike, aksi apo plani koordinativ, në hapësirë ose plan. Me këtë nocion shkurt nënkuptohet kjo karakteristikë e materialit: në se masim një cilësi fiziko-mekanike në pika të tij që ndodhen në drejtime të ndryshme, por gjeometrikisht simetrike marrim rezultate të njëjta. Për një material që posedon një simetri të brendshme ndryshe thuhet se ne nuk jemi në gjendje që nga provat (matjet) të “*kapim*” ndryshime (transformime) të caktuara të sistemit koordinativ të referimit.

Në një “*kontekst matematik*”, thuhet se simetria e materialit shprehet nga invarianca e një madhësie kundrejt orientimit të sistemit koordinativ.

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.1 KUPTIME BAZË

- **Simetria si invariancë ndaj transformimeve ortogonale**

Fakti që mjedisi (materiali) i një fushe fizike-inxhinierike ka një simetri të brendshme shprehet me atë që matrica “karakterizuese”  $\mathbf{K} \equiv [\mathbf{K}]$  e materialit, e supozuar kjo katrore simetrike  $3 \times 3$ , nuk ndryshon kur mbi “të “aplikohet” një transformim ortogonal i sistemit koordinativ. Ky transformim nënkupton aplikimin mbi  $\mathbf{K}$  të një matrice katrore  $3 \times 3$   $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

që përgjithësisht është jo-simetrike dhe e tillë që:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{1}, \text{ pra: } \mathbf{a}^T = \mathbf{a}^{-1} \quad (4.2)$$

ku  $\mathbf{1} \equiv [1]$  është matrica njësi  $3 \times 3$ .

Matrica  $\mathbf{a} = [a]$  quhet matricë ortogonale.

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.1 KUPTIME BAZË

- **Simetria si invariancë ndaj transformimeve ortogonale**

Kushti i simetrisë materiale shprehet me barazimet:

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \quad (4.3)$$

Ja dy matrica ortogonale:

1.- Matricë numerike

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

2.- Matrica transformuese (1.13)

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Në MM, ku për rastin e përgjithshëm 3-D si “*matricë materiale*” mund të konsiderojmë matricën e ngurtësisë të materialit  $\mathbf{C}$ , e cila ka përmasat  $6 \times 6$ , marrëdhëniet analitike të dhëna më sipër mbi simetrinë adoptohen në mënyra të përshtatshme përkatëse.



## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.1 KUPTIME BAZË

- **Ilustrim: Materiali me izotropi tërthore**

Ky është material me simetri kundrejt një aksi - “z” në rastin konkret të fig. 4.1. Kjo tregon që materiali ka veti të njëjta në çdo drejtim të hequr në një plan pingul me atë aks.

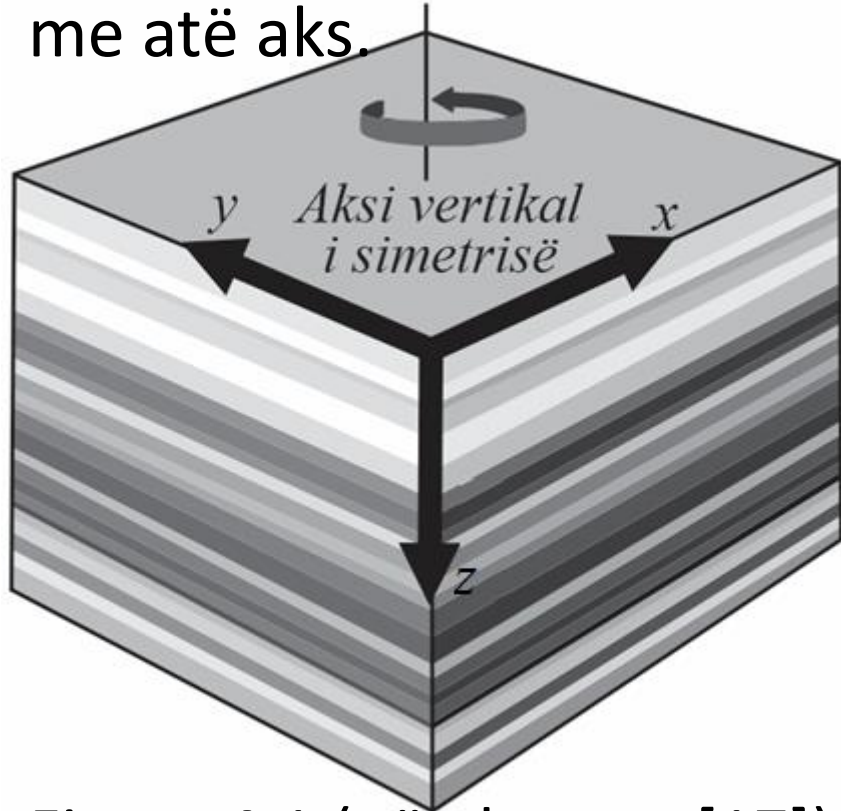


Figura 4.1 (përsht. nga [17])

Duke përdorur njohuritë nga Gjeometria analitike do të konkludohej se materiali ka veti invariante ndaj rrotullimit të sistemit koordinativ, me një kënd çfarëdo  $\vartheta$  në planin x-y (rreth aksit z). Matrica ortogonale e një transformimi të tillë është:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

# 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

## 4.2 MATERIALI ORTOTROP - Karakteristika të përgjithshme

Ky material konsiderohet se përbën një nën-grup të materialeve anizotropë.

Materiali ortotrop ka tri plane ortogonalë simetrie (shih fig. 4.2).

Materialet ortotropë janë mjaft të përhapur në natyrë. I tillë është në veçanti druri (fig. 4.3), i cili ka një strukturë kompozite: fibra celuloze + “*matricë*” ngjitëse, “*linjinë*”.

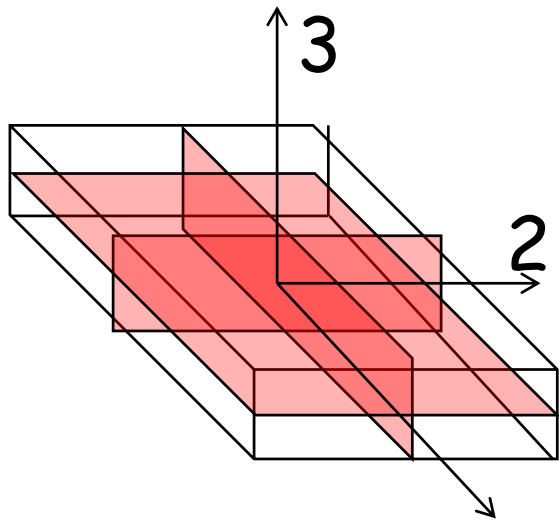


Figura 4.2

1

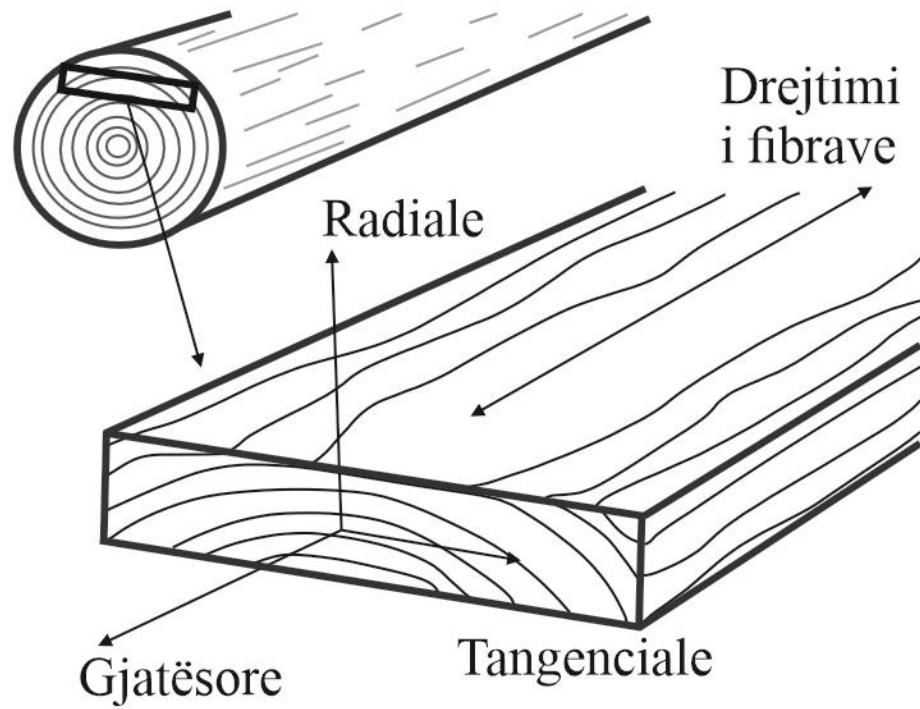


Figura 4.3

Ka dhe materiale ortotropë të përftuara në rrugë industriale, siç janë p.sh. pllakat e holla metalike që u përmendën më sipër (fig. 3.1), të prodhuara me procesin e petëzimit (“*rolled metals*”).

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - Karakteristika të përgjithshme

Materiale ortotrope janë edhe pllakat e holla (“*lamina*”), të prodhuara me material kompozit me fibra përforcuese, një- drejtimshe (fig. 4.4) ose dy- drejtimshe. Elementët e një lamine janë fibrat dhe “*matrica*” lidhëse, me modulet elastike përkatëse të tyre.

Në funksion të destinacionit, mjedisit etj. “*matrica*” mund të jetë prej materialesh të ndryshme, si p.sh. polimer, metal ose qeramikë.

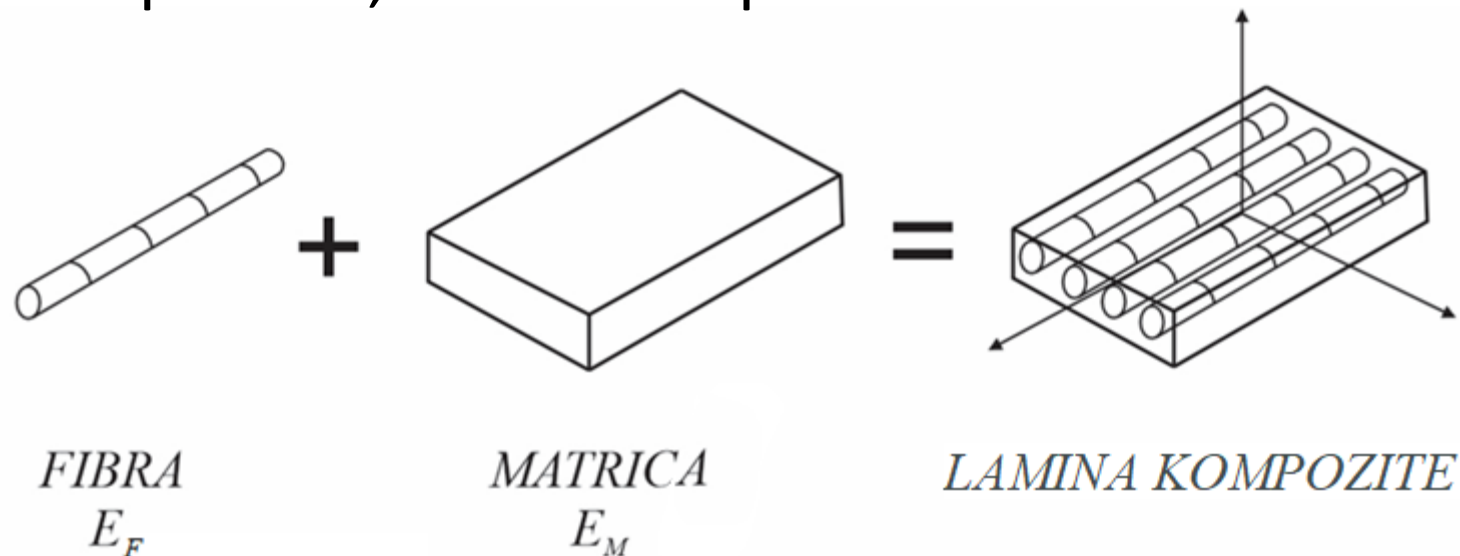


Figura 4.4

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - Karakteristika të përgjithshme

Disa lamina mund të bashkohen për të formuar një material *kompozit laminat*.

Ndër laminatet më të hershme janë ato prej druri (me shtresa të holla druri).

Në strukturat e tipit “laminat” aplikohet gjerësisht ndërthurja e laminave me orientime (kënde) të ndryshme të fibrave përforcuese, si në fig. 4.5 p.sh.

Veçanërisht në industrinë aero-spaciale ka laminate me numur të madh laminash (100 e më shumë) me fibra xhami apo karboni dhe me trashësi nga 5mm në 0.1 mm. Në fig. 4.6 paraqitet prerja tërthore e një laminati me tre lamina “epoxy” me fibra grafiti ( “*graphite/epoxy lamina*”), të lidhura midis tyre me trashësi secila 5mm, me orientime të ndryshme në plan ( $0^\circ/30^\circ/-45^\circ$ ).

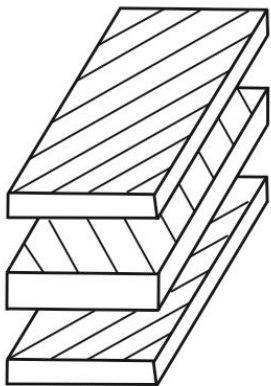


Figura 4.5

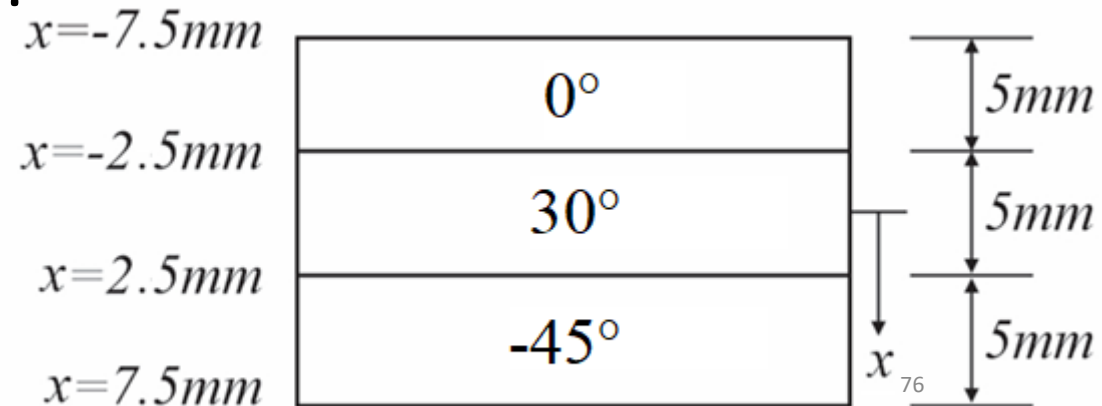


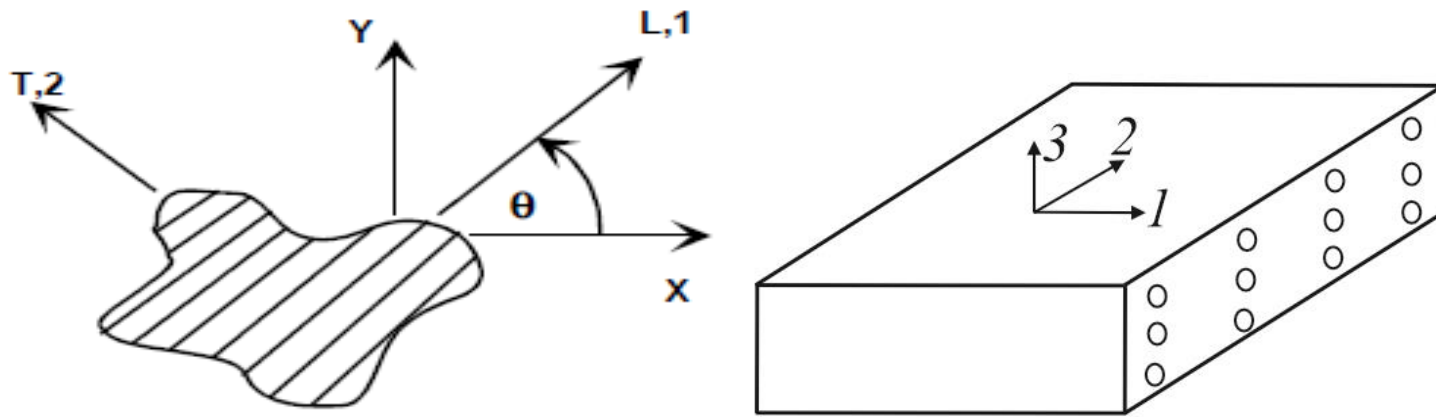
Figura 4.6

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - Shprehjet e ligjit të Hukut – Rasti 3D i laminave ortotrope

Paraqitjet vijuese përqendrohen te laminat ortotrope. Modelet principale llogaritëse të tyre janë paraqitur në fig. 4.7-a,b. Aty drejtimi i fibrave përcakton drejtimin e një aksi kryesor, atij gjatësor që shënohet me L (ose 1). Aksi pingul me 'të në planin e laminës është gjithashtu kryesor dhe quhet *tërthor*, T (ose 2). Kemi dhe aksin kryesor 3, normal me planin 1-2.

Dyshet e akseve "kryesore" 1(L), 2(T), 3 përcaktojnë planet ortogonale të simetrisë të laminës. Në fig. 4.7-a tregohet këndi pozitiv  $\theta$ , si dhe akset *globale* të llogaritjes x, y.



a)

Figura 4.7

b)

Referuar një sistemi të tillë matricat e ngurtësisë [C] dhe të fleksibilitetit [S] të materialit ortotrop janë me mjaft elementë zero dhe kanë vetëm **9** konstante elastike të pavarura nga **21** që ka materiali anizotrop.

# 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

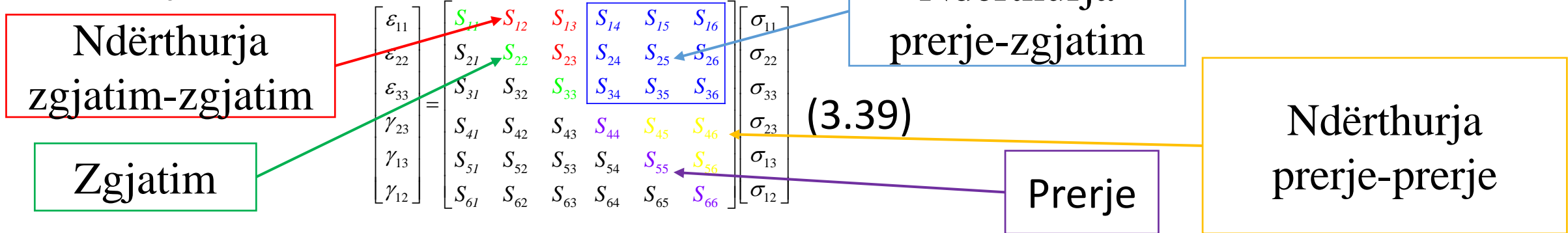
## 4.2 MATERIALI ORTOTROP - Shprehjet e ligjit të Hukut – Rasti 3D i laminave ortotrope

Forma e përgjithshme e matricave [C] dhe [S] të materialit ortotrop është përkatësisht:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ri-shkruajmë (3.39):



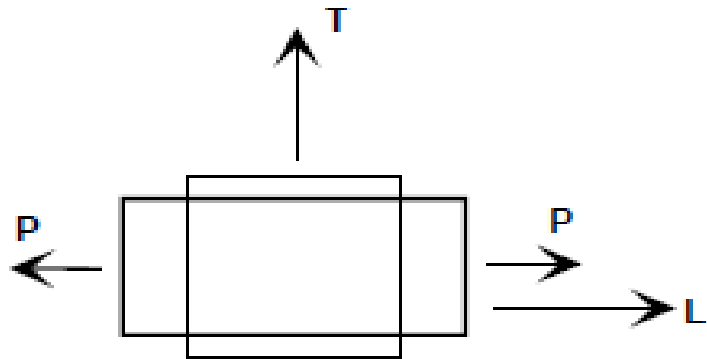
Nga krahasimi i (4.7) me (3.39) konkludojmë se kur në një laminë ortotrope sforcimet nga jashtë ushtrohen sipas akseve “kryesore” të saj, në 'të nuk shfaqen ndërthurje mes deformacioneve *normale* dhe deformacioneve të *prerjes*; gjithashtu nuk shfaqen ndërthurje të deformacioneve të *prerjes* mes tyre.



## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

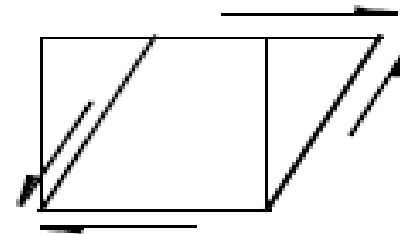
### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - *Sjellja e laminave ortotrope ndaj ngarkesave të jashtme*

Në fig 4.8-a,b tregohet sjellja (reagimi) e një elementi ortotrop në plan. Sforcimet *normale* shkaktojnë, sipas drejtimeve kryesore, vetëm deformacione *lineare* (fig. 4.8-a): tërheqje në drejtimin L(1) dhe, si efekt Puasoni, ngushtim në drejtimin tërthor T(2), ndërkohë që deformacionet e prerjes janë zero. Në mënyrë analoge, një ngarkesë *prerëse* sipas orientimeve L-T (fig. 4.8-b) i shkakton elementit deformacione në prerje vetëm në planin L-T. Situatat e fig. 4.8-a,b janë të ngjashme me ato të një lamine izotrope



Ngarkesë aksiale në drejtimin kryesor, L

a)



Ngarkesë prerëse në planin LT

b)

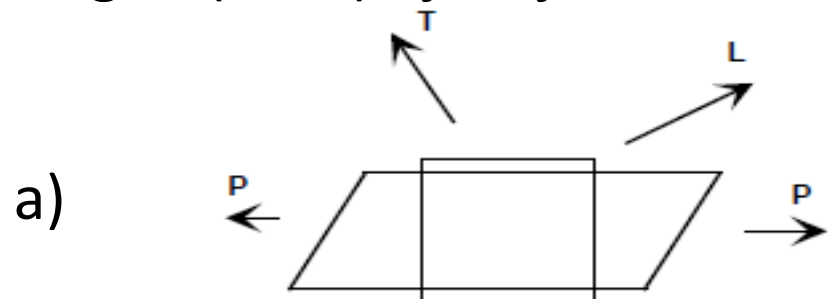
Figura 4.8

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - Sjellja e laminave ortotrope ndaj ngarkesave të jashtme

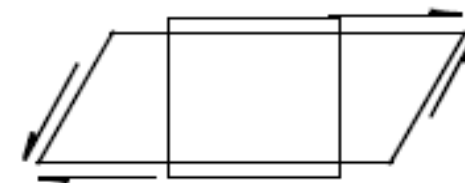
Midis laminave ortotrope dhe izotrope ka ngjashmëri, por dhe një ndryshim thelbësor: laminat izotrope nuk kanë akse apo plane "të preferuar", sipas të cilëve të shfaqet një deformim i thjeshtë, "i rregullt"; ato deformohen në forma "të rregullta" ndaj ngarkesave të orientuara në mënyrë të çfardoshme.

Në ndryshim nga laminat izotrope, laminat ortotrope mënyrën e "rregullt" të deformimit e kanë të kushtëzuar me ngarkimin sipas akseve kryesore. Laminat ortotrope me ngarkime të tilla cilësohen si "**ortotrope speciale**". Në fig. 4.9 -a,b tregohet se si të njëjta laminë si ajo e fig. 4.8 a,b shfaqet "ndërthurjet" midis deformacioneve të zgjatim-shkurtimit dhe atyre të prerjes. Shkaku: materiali ortotrop i laminës është i ngarkuar me forca të orientimeve arbitrare (çfarëdo), pra jo sipas akseve kryesore. Kështu ai material reagon (sillet) njëjloj si materialet me anizotropi të plotë.



a) Ngarkesë tërheqëse në drejtim arbitrar

Figura 4.9



b) Ngarkesë prerëse në drejtim arbitrar



## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - *Llogaritja e laminave ortotrope speciale*

Nga kuptimi fizik që ka secili prej termave të matricës të fleksibilitetit (4.7) të një materiali ortotrop dhe duke përdorur formula të Rezistencës së materialeve, kjo matricë  $\mathbf{S} \equiv [S_{ij}]$  merret në formën konkrete vijuese:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ku:

- $E_1, E_2$  &  $E_3$  tre modulet e elasticitetit në drejtimet kryesore 1, 2, 3;
- tre modulet elastikë të prerjes  $G_{12}, G_{23}$  &  $G_{31}$  (ose  $G_{13}$ ) në planet 1–2, 2–3 & 3–1 (ose 1–3);
- tre koeficientët e Puasonit  $\nu_{12}, \nu_{23}$  &  $\nu_{31}$ .

## 4. MATERIALE ANIZOTROPË ME SIMETRI TË BRENDSHME – MATERIALI ORTOTROP

### 4.2 MATERIALI ORTOTROP - *Llogaritja e laminave ortotrope speciale*

Matrica e ngurtësisë  $\mathbf{C} \equiv [C_{ij}]$  merret nga invertimi i matricës  $[S_{ij}]$  të (4.8):

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ku:

$$\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}) / (E_1 E_2 E_3) \quad (4.10)$$

Zgjidhja e problemeve të laminave (trupave) **ortotrope speciale**, pra të ngarkuar sipas akseve kryesore bëhet me ekuacionin vijues që shpreh ligjin e përgjithësuar të Hukut si marrëdhënie  $\boldsymbol{\varepsilon}$ - $\boldsymbol{\sigma}$ :  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{S}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j$  ose  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} = [\mathbf{S}_{ij}] \{\boldsymbol{\sigma}_j\}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) (4.11) me  $[S_{ij}]$  sipas (4.8). Nëse jepen sforçimet  $\boldsymbol{\sigma}_j$  nga (4.11) gjenden deformacionet  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ .

# JU FALENDEROJ PËR VËMENDJEN